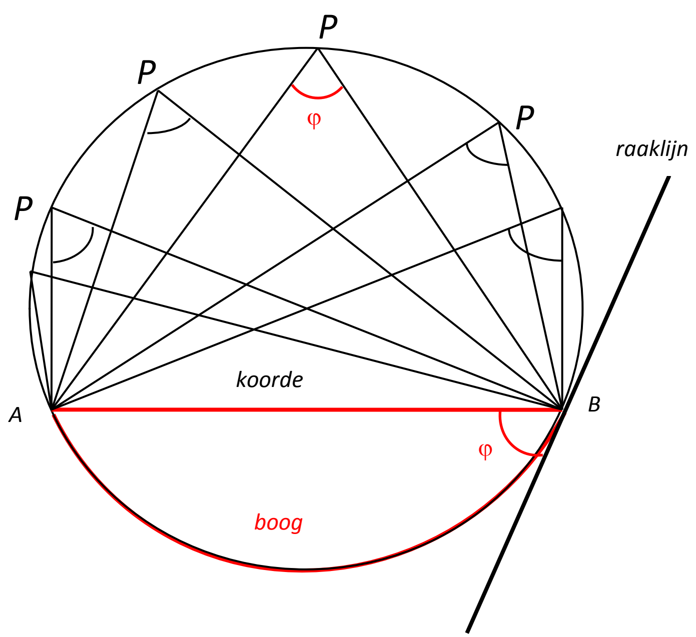
2010-II bij vraag 1

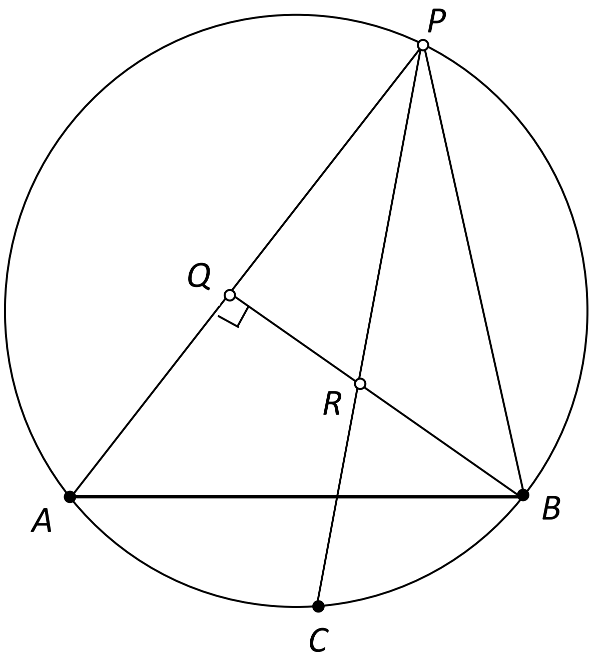
Vooraf: De stelling van de constante (omtreks)hoek.

Een applet (animatie) hierover is te vinden op bijvoorbeeld:
http://home.planet.nl/~hietb062/java3.htm#constantehoek
De punten *P* op de omtrek van de cirkel, aan één kant van koorde *AB* gelegen, “zien” alle de boog *AB* onder dezelfde, constante hoek. Dat geldt ook voor de raaklijn (bij *B*).



2010-II Cirkel en hoogtelijn

Op een cirkel kiezen we drie vaste punten A, B en C, waarbij lijnstuk AB geen middellijn is en punt C op de kortste cirkelboog AB ligt. Een punt P doorloopt dat deel van de langste cirkelboog AB waarvoor driehoek ABP niet stomphoekig is. De hoogtelijn BQ van driehoek ABP snijdt de koorde CP in punt R.

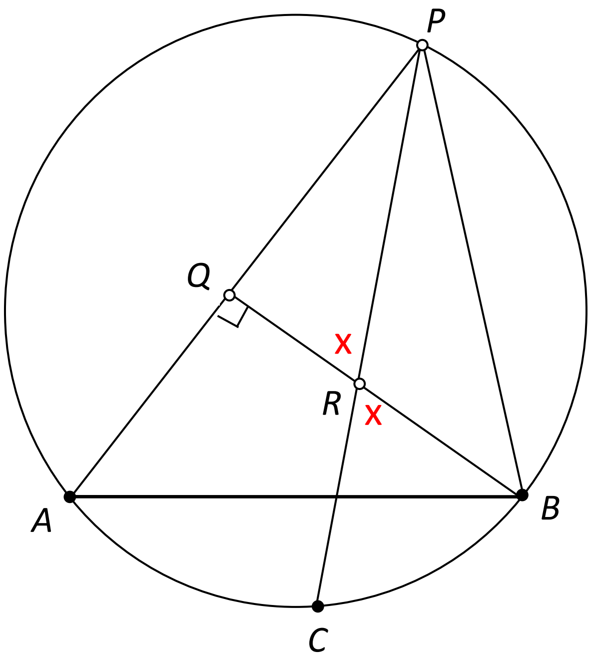


In de figuur is een mogelijke positie van P getekend met de bijbehorende punten Q en R. Bij de beweging van P over het hierboven beschreven deel van de cirkelboog AB verandert de grootte van hoek BRC niet.

Vraag 1. Bewijs dit.

2010-II   Cirkel en hoogtelijn

Op een cirkel kiezen we drie vaste punten A, B en C, waarbij lijnstuk AB geen middellijn is en punt C op de kortste cirkelboog AB ligt. Een punt P doorloopt dat deel van de langste cirkelboog AB waarvoor driehoek ABP niet stomphoekig is. De hoogtelijn BQ van driehoek ABP snijdt de koorde CP in punt R.



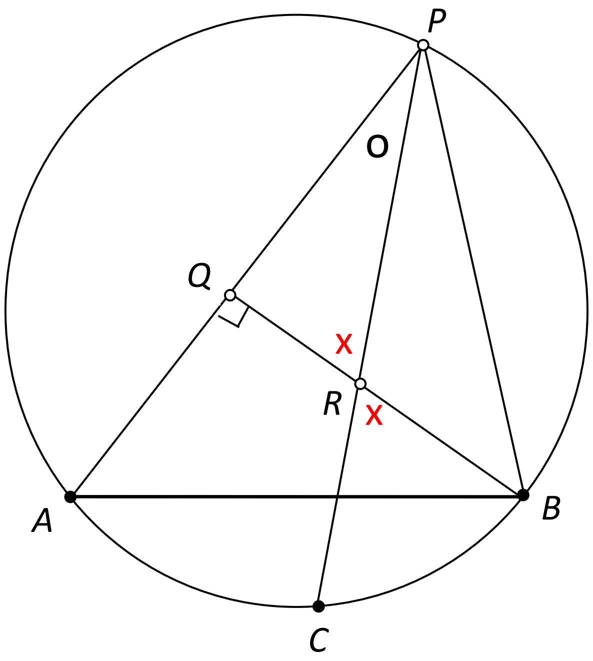
In de figuur is een mogelijke positie van P getekend met de bijbehorende punten Q en R. Bij de beweging van P over het hierboven beschreven deel van de cirkelboog AB verandert de grootte van hoek BRC niet.

Vraag 1.   Bewijs dit.

- $\angle BRC = \angle PRQ$ (*overstaande hoeken*)

2010-II   Cirkel en hoogtelijn

Op een cirkel kiezen we drie vaste punten *A*, *B* en *C*, waarbij lijnstuk *AB* geen middellijn is en punt *C* op de kortste cirkelboog *AB* ligt. Een punt *P* doorloopt dat deel van de langste cirkelboog *AB* waarvoor driehoek *ABP* niet stomphoekig is. De hoogtelijn *BQ* van driehoek *ABP* snijdt de koorde *CP* in punt *R*.



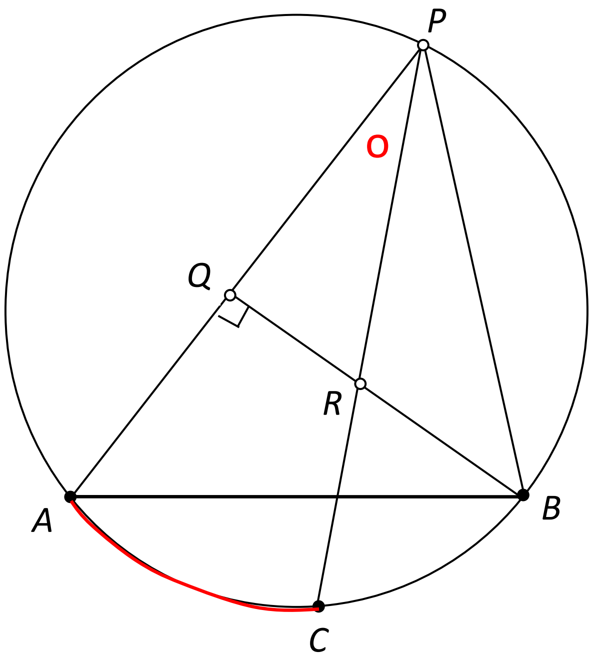
In de figuur is een mogelijke positie van *P* getekend met de bijbehorende punten *Q* en *R*. Bij de beweging van *P* over het hierboven beschreven deel van de cirkelboog *AB* verandert de grootte van hoek *BRC* niet.

Vraag 1. Bewijs dit.

- $\angle BRC = \angle PRQ$ (*overstaande hoeken*)

- $\angle PRQ = 90^o - \angle QPR$ (*hoekensom driehoek*)

2010-II Cirkel en hoogtelijn



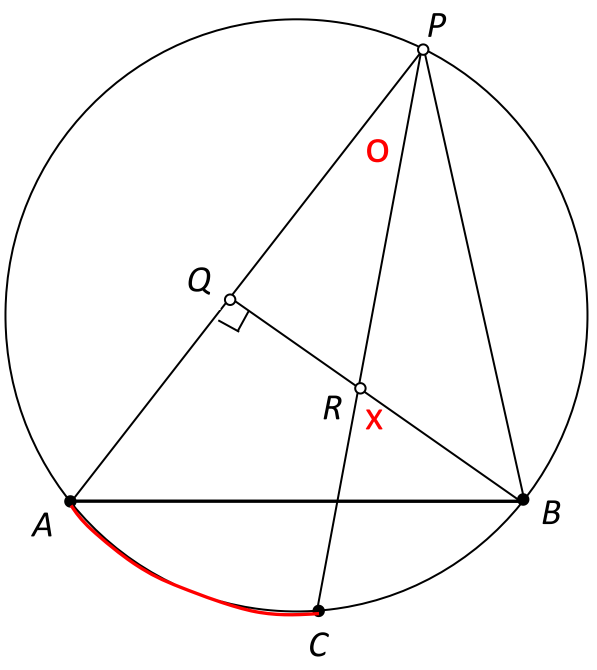
Op een cirkel kiezen we drie vaste punten *A*, *B* en *C*, waarbij lijnstuk *AB* geen middellijn is en punt *C* op de kortste cirkelboog *AB* ligt. Een punt *P* doorloopt dat deel van de langste cirkelboog *AB* waarvoor driehoek *ABP* niet stomphoekig is. De hoogtelijn *BQ* van driehoek *ABP* snijdt de koorde *CP* in punt *R*.

In de figuur is een mogelijke positie van *P* getekend met de bijbehorende punten *Q* en *R*. Bij de beweging van *P* over het hierboven beschreven deel van de cirkelboog *AB* verandert de grootte van hoek *BRC* niet.

Vraag 1. Bewijs dit.

- $\angle BRC = \angle PRQ$ (*overstaande hoeken*)
- $\angle PRQ = 90^o - \angle QPR$ (*hoekensom driehoek*)
- $\angle APC = \angle QPR$ is een *constante hoek* (op boog *AC*)

2010-II   Cirkel en hoogtelijn



Op een cirkel kiezen we drie vaste punten *A*, *B* en *C*, waarbij lijnstuk *AB* geen middellijn is en punt *C* op de kortste cirkelboog *AB* ligt. Een punt *P* doorloopt dat deel van de langste cirkelboog *AB* waarvoor driehoek *ABP* niet stomphoekig is. De hoogtelijn *BQ* van driehoek *ABP* snijdt de koorde *CP* in punt *R*.

In de figuur is een mogelijke positie van *P* getekend met de bijbehorende punten *Q* en *R*. Bij de beweging van *P* over het hierboven beschreven deel van de cirkelboog *AB* verandert de grootte van hoek *BRC* niet.

Vraag 1. Bewijs dit.

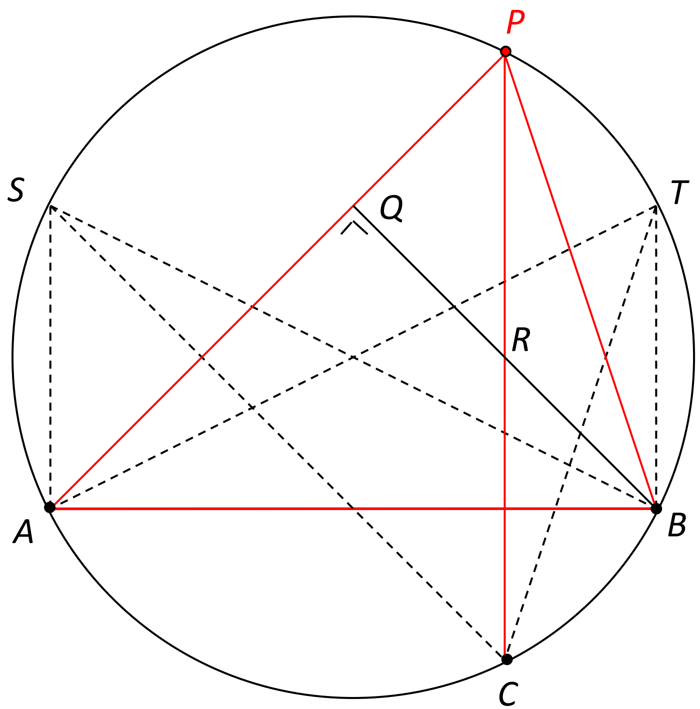
- $\angle BRC = \angle PRQ$ (*overstaande hoeken*)
- $\angle PRQ = 90^{o} - \angle QPR$ (*hoekensom driehoek*)
- $\angle APC = \angle QPR$ is een *constante hoek* (op boog *AC*)
- Dus ook $\angle BRC$ is een constante hoek.

2010-II Cirkel en hoogtelijn

De baan van R die hoort bij de beweging van P over de cirkel, kan getekend worden met behulp van de in vraag 1 genoemde eigenschap. ΔABP mag niet stomphoekig zijn.

Vraag 2. Teken op deze manier de baan van R. Geef de randpunten van de baan, waarbij driehoek ABP rechthoekig is, duidelijk aan. Licht je werkwijze toe.

- R ligt op een cirkelboog.
- De randpunten daarvan worden bepaald door de loodlijnen AS en BT.

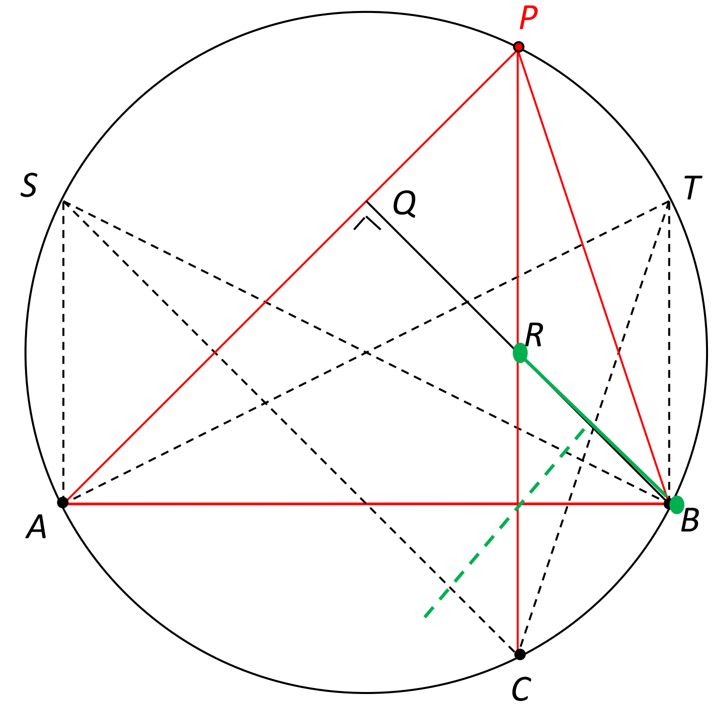


2010-II Cirkel en hoogtelijn

De baan van *R* die hoort bij de beweging van *P* over de cirkel, kan getekend worden met behulp van de in vraag 1 genoemde eigenschap. Δ*ABP* mag niet stomphoekig zijn

Vraag 2. Teken op deze manier de baan van *R*. Geef de randpunten van de baan, waarbij driehoek *ABP* rechthoekig is, duidelijk aan. Licht je werkwijze toe.

- *R* ligt op een cirkelboog.
- De randpunten daarvan worden bepaald door de loodlijnen *AS* en *BT* en de lijnstukken *SC* en *TC*.
- Het middelpunt van de cirkelboog kan gevonden worden door de middelloodlijn van *RB* te snijden met *AB* (groene *stippellijn*).

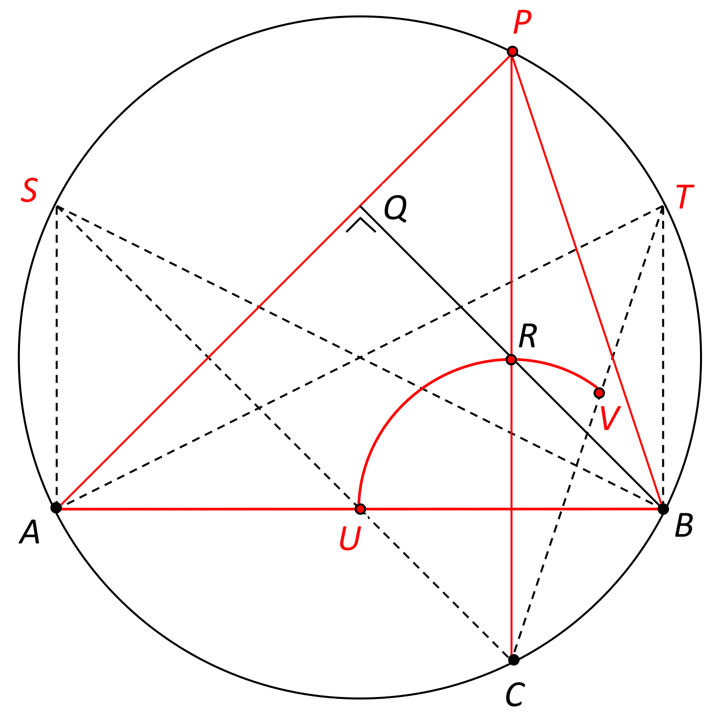


2010-II Cirkel en hoogtelijn

De baan van *R* die hoort bij de beweging van *P* over de cirkel, kan getekend worden met behulp van de in vraag 1 genoemde eigenschap.

Vraag 2. Teken op deze manier de baan van *R*. Geef de randpunten van de baan, waarbij driehoek *ABP* rechthoekig is, duidelijk aan. Licht je werkwijze toe.

- *R* ligt op een cirkelboog.
- De randpunten daarvan worden bepaald door de loodlijnen *AS* en *BT* en de lijnstukken *SC* en *TC*.
- De cirkelboog *UV* is hier rood getekend.



2010-II Leercurve

Het aanleren van een nieuwe handeling kost tijd. Als je een handeling vaker uitvoert, wordt de voor deze handeling benodigde tijd meestal steeds korter. T.P. Wright stelde voor dit leerproces de volgende formule op:

$T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ Hierin is:

- T_n het aantal seconden dat nodig is als de handeling voor de n-de keer wordt uitgevoerd,
- T_1 het aantal seconden dat nodig is als de handeling voor de eerste keer wordt uitgevoerd en
- a een positieve constante die afhangt van de snelheid van het leerproces.

Volgens de formule van Wright leidt een verdubbeling van het aantal keer uitvoeren van een zelfde handeling tot een daling van de hoeveelheid benodigde tijd (en dus kosten) van de laatste keer met een vast percentage.

Men spreekt van een P%-leercurve als bij verdubbeling van het aantal keer uitvoeren van n naar $2n$ de laatste keer nog maar P% kost van de tijd bij de n-de keer. Ofwel: $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$

Vraag 3. Bereken de waarde van a in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

We markeren op het volgende scherm de relevante begrippen.

2010-II Leercurve

Het aanleren van een nieuwe handeling kost tijd. Als je een handeling vaker uitvoert, wordt de voor deze handeling benodigde tijd meestal steeds korter. T.P. Wright stelde voor dit leerproces de volgende formule op:

$T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ Hierin is:

- T_n het aantal seconden dat nodig is als de handeling voor de n-de keer wordt uitgevoerd,
- T_1 het aantal seconden dat nodig is als de handeling voor de eerste keer wordt uitgevoerd en
- a een positieve constante die afhangt van de snelheid van het leerproces.

Volgens de formule van Wright leidt een verdubbeling van het aantal keer uitvoeren van een zelfde handeling tot een daling van de hoeveelheid benodigde tijd (en dus kosten) van de laatste keer met een vast percentage.

Men spreekt van een P%-leercurve als bij verdubbeling van het aantal keer uitvoeren van n naar $2n$ de laatste keer nog maar P% kost van de tijd bij de n-de keer. Ofwel: $\frac{T_{2n}}{T_n} = \frac{P}{100}$

Vraag 3. Bereken de waarde van a in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

De waarde van *a* moet dus berekend worden met behulp van de volgende gegevens:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$

(3) $P = 85$

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = ...$

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = T_1 \cdot (2n)^{-a}$ (vervang *n* door 2*n*)

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$ dus ....

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = T_1 \cdot (2n)^{-a}$

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$ dus $\dfrac{\cancel{T_1} \cdot (2n)^{-a}}{\cancel{T_1} \cdot n^{-a}} = \dfrac{P}{100}$

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = T_1 \cdot (2n)^{-a}$

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$ dus $\dfrac{\cancel{T_1} \cdot (2n)^{-a}}{\cancel{T_1} \cdot n^{-a}} = \dfrac{P}{100}$ oftewel $(\dfrac{2n}{n})^{-a} = \dfrac{P}{100}$ (*machtsregel* $\dfrac{a^p}{b^p} = (\dfrac{a}{b})^p$)

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = T_1 \cdot (2n)^{-a}$

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$ dus $\dfrac{\cancel{T_1} \cdot (2n)^{-a}}{\cancel{T_1} \cdot n^{-a}} = \dfrac{P}{100}$ oftewel $(\dfrac{2n}{n})^{-a} = \dfrac{P}{100}$

(3) $P = 85$ invullen geeft :

2010-II Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = T_1 \cdot (2n)^{-a}$

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$ dus $\dfrac{\cancel{T_1} \cdot (2n)^{-a}}{\cancel{T_1} \cdot n^{-a}} = \dfrac{P}{100}$ oftewel $(\dfrac{2n}{n})^{-a} = \dfrac{P}{100}$

(3) $P = 85$ invullen geeft : $2^{-a} = \frac{85}{100}$ dus $-a = \ln 0{,}85$

2010-II   Leercurve

Vraag 3. Bereken de waarde van *a* in de formule van Wright bij een 85%-leercurve. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Berekening:

(1) $T_n = T_1 \cdot n^{-a}$ dus $T_{2n} = T_1 \cdot (2n)^{-a}$

(2) $\dfrac{T_{2n}}{T_n} = \dfrac{P}{100}$ dus $\dfrac{\cancel{T_1} \cdot (2n)^{-a}}{\cancel{T_1} \cdot n^{-a}} = \dfrac{P}{100}$ oftewel $(\dfrac{2n}{n})^{-a} = \dfrac{P}{100}$

(3) $P = 85$ invullen geeft : $2^{-a} = \frac{85}{100}$ dus $-a = \ln 0{,}85$

Met het antwoord: $a \approx 0{,}23$

2010-II Leercurve

In een bepaald bedrijf voeren mensen een handeling aan de lopende band uit. Deze handeling wordt niet door iedereen op dezelfde manier aangeleerd. In de praktijk komt men onder andere de volgende twee soorten mensen tegen:

– **snelle starters**: deze mensen kunnen de handeling de eerste keer al snel uitvoeren, maar het lukt hen daarna niet om dit snel te verbeteren,

– **snelle leerders**: de eerste keer duurt bij deze mensen wat langer, maar zij zijn in staat snel vooruitgang te boeken.

Voor beide soorten hanteert het bedrijf een formule van Wright:

– snelle starters: $T_n = 20 \cdot n^{-0,152}$

– snelle leerders: $T_n = 40 \cdot n^{-0,328}$

Vraag 4. Bereken bij de hoeveelste keer uitvoeren een snelle leerder de handeling voor het eerst sneller uitvoert dan een snelle starter.

2010-II Leercurve

In een bepaald bedrijf voeren mensen een handeling aan de lopende band uit. Deze handeling wordt niet door iedereen op dezelfde manier aangeleerd. In de praktijk komt men onder andere de volgende twee soorten mensen tegen:

– **snelle starters**: deze mensen kunnen de handeling de eerste keer al snel uitvoeren, maar het lukt hen daarna niet om dit snel te verbeteren,

– **snelle leerders**: de eerste keer duurt bij deze mensen wat langer, maar zij zijn in staat snel vooruitgang te boeken.

Voor beide soorten hanteert het bedrijf een formule van Wright:

– snelle starters: $T_n = 20 \cdot n^{-0,152}$

– snelle leerders: $T_n = 40 \cdot n^{-0,328}$

Vraag 4. Bereken bij de hoeveelste keer uitvoeren een snelle leerder de handeling voor het eerst sneller uitvoert dan een snelle starter.

T_n is het aantal nodige seconden als de handeling voor de n-de keer wordt uitgevoerd

Dus de ongelijkheid $40 \cdot n^{-0,328} < 20 \cdot n^{-0,152}$ moet opgelost worden.

Mag met de GR, doe dus bijvoorbeeld:

2010-II Leercurve

In een bepaald bedrijf voeren mensen een handeling aan de lopende band uit. Deze handeling wordt niet door iedereen op dezelfde manier aangeleerd. In de praktijk komt men onder andere de volgende twee soorten mensen tegen:
– **snelle starters**: deze mensen kunnen de handeling de eerste keer al snel uitvoeren, maar het lukt hen daarna niet om dit snel te verbeteren,
– **snelle leerders**: de eerste keer duurt bij deze mensen wat langer, maar zij zijn in staat snel vooruitgang te boeken.
Voor beide soorten hanteert het bedrijf een formule van Wright:

– snelle starters: $T_n = 20 \cdot n^{-0{,}152}$
– snelle leerders: $T_n = 40 \cdot n^{-0{,}328}$

Vraag 4. Bereken bij de hoeveelste keer uitvoeren een snelle leerder de handeling voor het eerst sneller uitvoert dan een snelle starter.

T_n is het aantal nodige seconden als de handeling voor de n-de keer wordt uitgevoerd

Dus de ongelijkheid $40 \cdot n^{-0{,}328} < 20 \cdot n^{-0{,}152}$ moet opgelost worden.

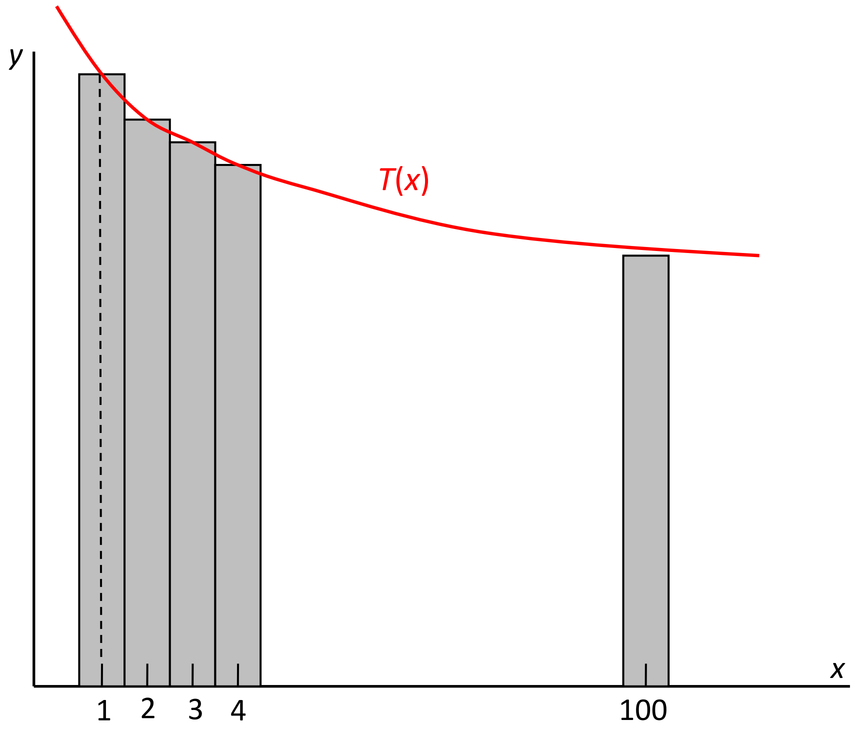
Zet de grafieken van Y1 = 40X^ –.328 en Y2 = 20X^ –.152 op het scherm (0 ≤ X ≤ 100)

en doe intersect. Het antwoord is: vanaf de 52-ste handeling ($n \geq 52$)

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1+T_2+T_3+...+T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x)=20\cdot x^{-0,152}$.



Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van *T* met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x) = 20 \cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

Dit is de wiskunde op z'n kop. De tekening met de rechthoeken staat er, het is nu voor de hand liggend en simpel om met een computer (of rekenmachine) de som te berekenen. Om dit te te doen door een *exacte* integraal achteraf met een GR *te benaderen* is onzinnig. Met de TI-83 of TI-84 in de hand gaat het veel sneller (en zonder nadenken) via:

sum(seq(20X^-.152, X, 1, 100)) = 1162.83

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x) = 20 \cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

Primitiveren : $F(x) =$

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x) = 20 \cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

$$\text{Primitiveren:} \quad F(x) = 20 \cdot \frac{1}{-0,152 + 1} x^{-0,152+1} = 23,585 \cdot x^{0,848}$$

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x) = 20 \cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

$$\text{Primitiveren:} \quad F(x) = 20 \cdot \frac{1}{-0,152+1} x^{-0,152+1} = 23,585 \cdot x^{0,848}$$

$$\text{Integreren:} \quad Opp =$$

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x)=20 \cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

$$\text{Primitiveren}: \quad F(x) = 20 \cdot \frac{1}{-0,152+1} x^{-0,152+1} = 23,585 \cdot x^{0,848}$$

$$\text{Integreren}: \quad Opp = \int_{0,5}^{100,5} 20 \cdot \frac{1}{-0,152+1} x^{-0,152+1}\, dx = \Big[23,585 \cdot x^{0,848} \Big]_{0,5}^{100,5}$$

$$\text{Uitgewerkt}: \quad Opp =$$

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1+T_2+T_3+...+T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x)=20\cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

$$\text{Primitiveren}: \quad F(x) = 20\cdot\frac{1}{-0,152+1}x^{-0,152+1} = 23,585\cdot x^{0,848}$$

$$\text{Integreren}: \quad Opp = \int_{0,5}^{100,5} 20\cdot\frac{1}{-0,152+1}x^{-0,152+1}\,dx = \left[23,585\cdot x^{0,848}\right]_{0,5}^{100,5}$$

$$\text{Uitgewerkt}: \quad Opp = 23,585\cdot(100,5^{0,848} - 0,5^{0,848}) \approx 1163$$

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1+T_2+T_3+...+T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x)=20 \cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

Primitiveren : $F(x) = 20 \cdot \dfrac{1}{-0,152+1} x^{-0,152+1} = 23,585 \cdot x^{0,848}$

Integreren : $Opp = \int_{0,5}^{100,5} 20 \cdot \dfrac{1}{-0,152+1} x^{-0,152+1}\, dx = \left[23,585 \cdot x^{0,848} \right]_{0,5}^{100,5}$

Uitgewerkt : $Opp = 23,585 \cdot (100,5^{0,848} - 0,5^{0,848}) \approx 1163$

Dus de gemiddelde tijdsduur is

2010-II Leercurve

Men wil weten hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Daarvoor moet eerst de totale tijd, dus de som $T_1+T_2+T_3+...+T_{100}$, uitgerekend worden. Deze som is gelijk aan de totale oppervlakte van 100 rechthoeken met breedte 1 en hoogtes $T_1, T_2, T_3, \dots, T_{100}$. (een aantal van deze rechthoeken is getekend).

De oppervlakte van de 100 rechthoeken kan goed benaderd worden met een oppervlakte onder de grafiek van de functie T die gegeven is door $T(x)=20\cdot x^{-0,152}$.

Vraag 5. Bereken deze oppervlakte onder de grafiek van T met behulp van primitiveren en bepaal hiermee hoe lang een snelle starter bij de eerste 100 handelingen gemiddeld over een handeling doet. Rond deze tijdsduur af op een geheel aantal seconden.

$$\text{Primitiveren :}\quad F(x) = 20\cdot\frac{1}{-0,152+1}x^{-0,152+1} = 23,585\cdot x^{0,848}$$

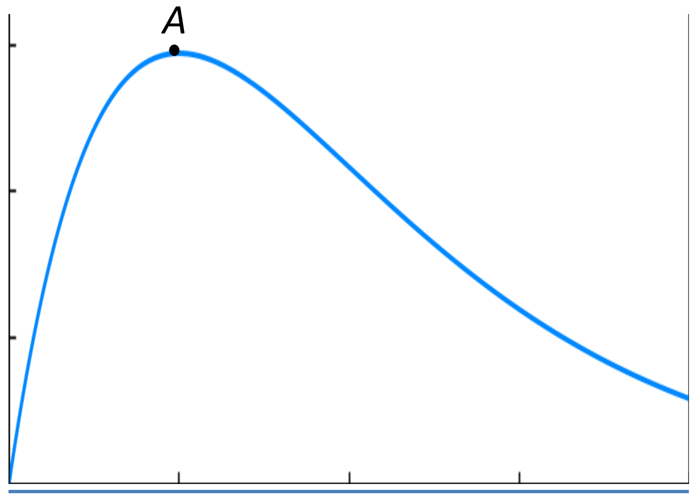
$$\text{Integreren :}\quad Opp = \int_{0,5}^{100,5} 20\cdot\frac{1}{-0,152+1}x^{-0,152+1}\,dx = \left[23,585\cdot x^{0,848}\right]_{0,5}^{100,5}$$

$$\text{Uitgewerkt :}\quad Opp = 23,585\cdot(100,5^{0,848}-0,5^{0,848})\approx 1163$$

Dus de gemiddelde tijdsduur is 1163 / 100 = 11,63 seconden (afgerond 12 seconden)

2010-II Exponentiële functie

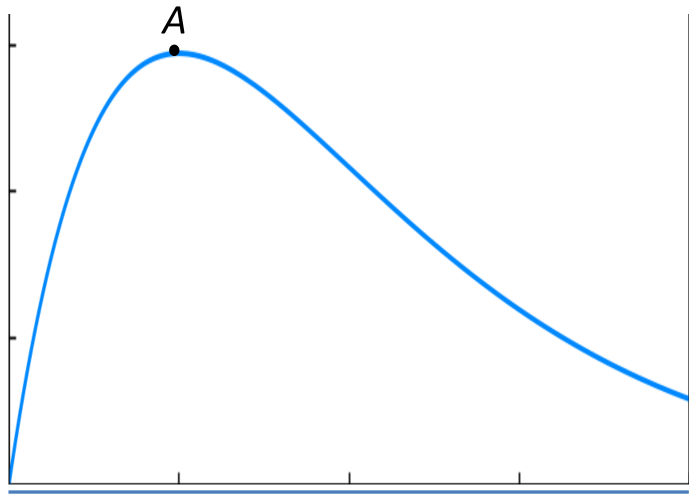
Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$



Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

2010-II Exponentiële functie

Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \frac{8x}{e^x}$

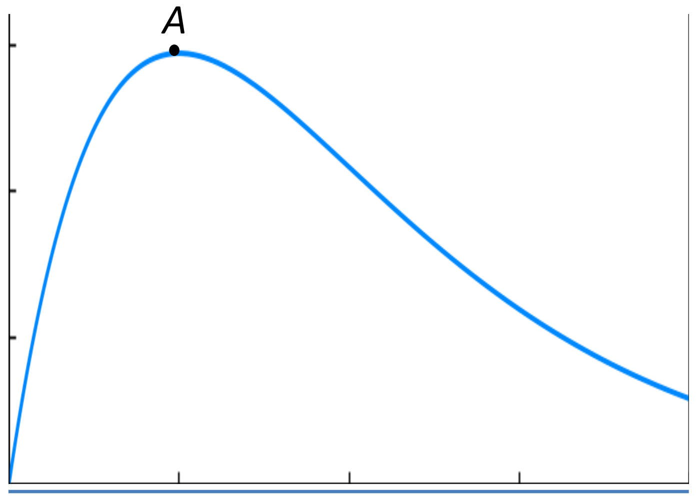


Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

2010-II Exponentiële functie

Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$



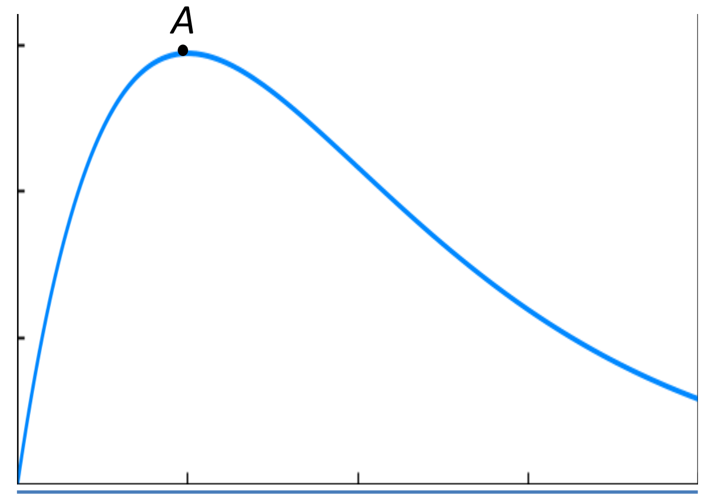
Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2}$$

2010-II Exponentiële functie

Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$



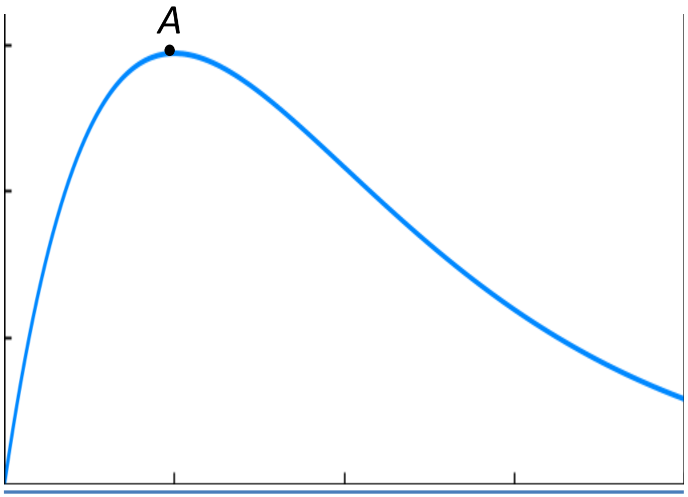
Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x(1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{8\cancel{e^x}(1-x)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{8(1-x)}{e^x}$$

2010-II Exponentiële functie

Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$



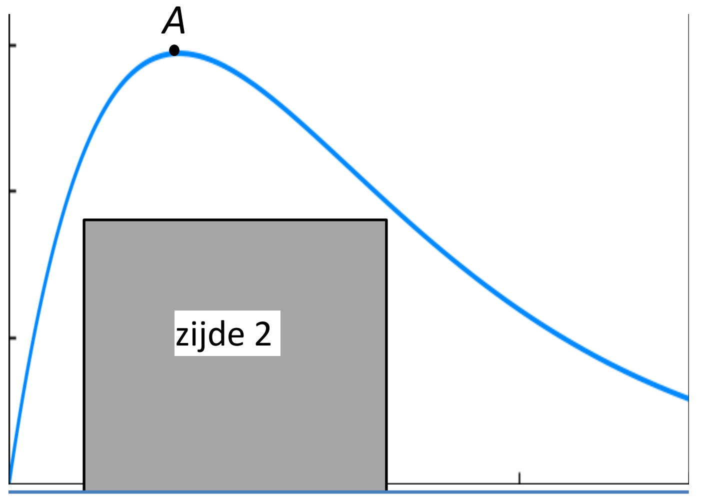
Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x(1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{8\cancel{e}^x(1-x)}{\cancel{e}^x \cdot e^x} = \frac{8(1-x)}{e^x}$$

Nulstellen geeft $x_A = 1$.

2010-II Exponentiële functie



Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$

Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

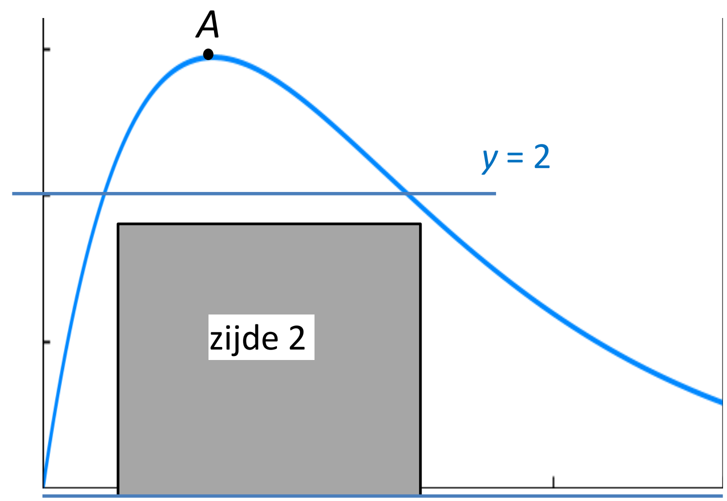
Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x(1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{8\cancel{e^x}(1-x)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{8(1-x)}{e^x}$$

Nulstellen geeft $x_A = 1$.

Vraag 7. Onderzoek via een berekening of een vierkant met zijde 2, waarvan één zijde op de x-as ligt, onder de grafiek past.

2010-II Exponentiële functie



Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$

Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x(1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{8\cancel{e}^x(1-x)}{\cancel{e}^x \cdot e^x} = \frac{8(1-x)}{e^x}$$

Nulstellen geeft $x_A = 1$.

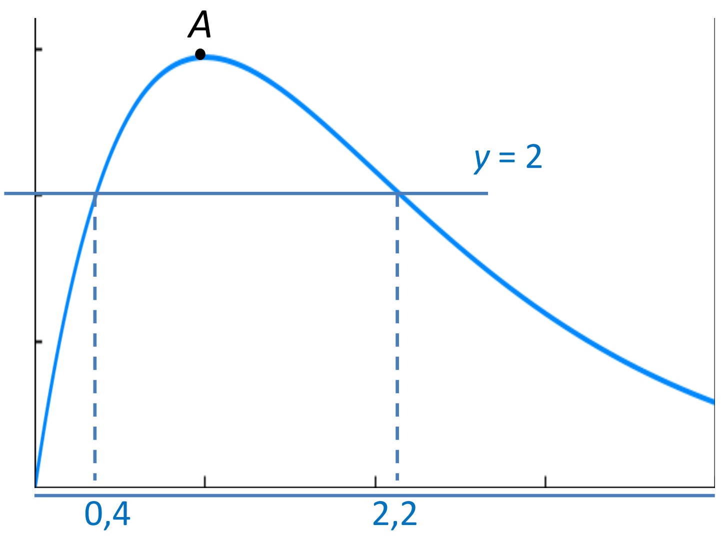
Vraag 7. Onderzoek via een berekening of een vierkant met zijde 2, waarvan één zijde op de x-as ligt, onder de grafiek past.

Oplossing: bepaal de snijpunten (bijv. via intersect) met de lijn $y = 2$.

De x-coördinaten daarvan zijn

2010-II Exponentiële functie

Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$



Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x(1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{8\cancel{e^x}(1-x)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{8(1-x)}{e^x}$$

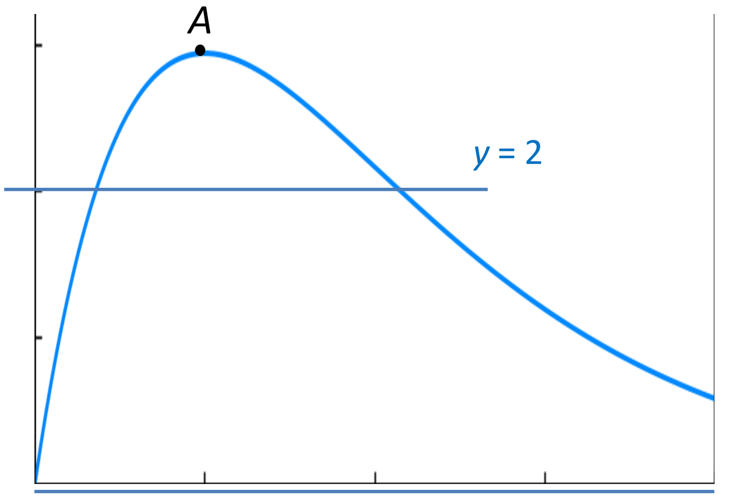
Nulstellen geeft $x_A = 1$.

Vraag 7. Onderzoek via een berekening of een vierkant met zijde 2, waarvan één zijde op de x-as ligt, onder de grafiek past.

Oplossing: bepaal de snijpunten (bijv. via intersect) met de lijn $y = 2$.

De x-coördinaten daarvan zijn (ongeveer) 0,36 en 2,15

2010-II Exponentiële functie



Getekend is voor $x \geq 0$ de grafiek van $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$

Vraag 6. Bereken exact de x-coördinaat van de top A.

Gebruik de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{8e^x - 8xe^x}{(e^x)^2} = \frac{8e^x(1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{8\cancel{e^x}(1-x)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{8(1-x)}{e^x}$$

Nulstellen geeft $x_A = 1$.

Vraag 7. Onderzoek via een berekening of een vierkant met zijde 2, waarvan één zijde op de x-as ligt, onder de grafiek past.

Oplossing: bepaal de snijpunten (bijv. via intersect) met de lijn $y = 2$.

De x-coördinaten daarvan zijn (ongeveer) 0,36 en 2,15

Het verschil daartussen is 1,8 dat is minder dan 2.

Conclusie: zo’n vierkant pas niet onder de grafiek.

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}} \qquad f(x) = \frac{8x}{e^x}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1} \ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}} \qquad f(x) = \frac{8x}{e^x}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1} \ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

$f(x) = g_n(x)$ geeft: $\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$

Kruislings uitvermenigvuldigen geeft:

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1}\ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

$f(x) = g_n(x)$ geeft: $\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$

Kruislings uitvermenigvuldigen geeft: $8nx \cdot e^x = 8x \cdot e^{nx}$. Hierin factoren wegdelen:

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1} \ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

$f(x) = g_n(x)$ geeft: $\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$

Kruislings uitvermenigvuldigen geeft: $8nx \cdot e^x = 8x \cdot e^{nx}$. Hierin factoren wegdelen:

$\cancel{8} \cdot n \cdot \cancel{x} \cdot e^x = \cancel{8} \cdot \cancel{x} \cdot e^{nx}$ dus: $n = ...$

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1}\ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

$f(x) = g_n(x)$ geeft: $\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$

Kruislings uitvermenigvuldigen geeft: $8nx \cdot e^x = 8x \cdot e^{nx}$. Hierin factoren wegdelen:

$\cancel{8} \cdot n \cdot \cancel{x} \cdot e^x = \cancel{8} \cdot \cancel{x} \cdot e^{nx}$ dus: $n = \frac{e^{nx}}{e^x} = e^{nx-x} = e^{x(n-1)}$. *En hier links en rechts de* ln *nemen*:

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{\mathrm{e}^{nx}}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1}\ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

$f(x) = g_n(x)$ geeft: $\frac{8x}{\mathrm{e}^x} = \frac{8nx}{\mathrm{e}^{nx}}$

Kruislings uitvermenigvuldigen geeft: $8nx \cdot \mathrm{e}^x = 8x \cdot \mathrm{e}^{nx}$. Hierin factoren wegdelen:

$\cancel{8} \cdot n \cdot \cancel{x} \cdot \mathrm{e}^x = \cancel{8} \cdot \cancel{x} \cdot \mathrm{e}^{nx}$ dus: $n = \frac{\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{nx-x} = \mathrm{e}^{x(n-1)}$. *En hier links en rechts de* ln *nemen*:

$\ln n = x(n-1)$ uitwerken tot:

2010-II Exponentiële functie

We bekijken nu voor positieve waarden van n met $n \neq 1$ de functie $g_n(x)$ die is gegeven door

$$g_n(x) = \frac{8nx}{e^{nx}}$$

De grafieken van $g_n(x)$ snijden de grafiek van f in het punt (0, 0).
Ook is er voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$ nog een ander snijpunt.
In een tabel staat voor enkele waarden van n de x-coördinaat van dit andere snijpunt.

Hieruit ontstaat het vermoeden dat de formule $x_{snijpunt} = \frac{1}{n-1}\ln n$ voor snijpunt x klopt voor elke positieve waarde van n met $n \neq 1$.

Vraag 8. Toon aan dat dit vermoeden juist is.

$f(x) = g_n(x)$ geeft: $\frac{8x}{e^x} = \frac{8nx}{e^{nx}}$

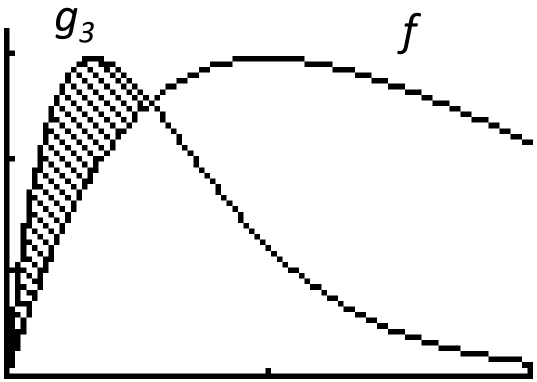
Kruislings uitvermenigvuldigen geeft: $8nx \cdot e^x = 8x \cdot e^{nx}$. Hierin factoren wegdelen:

$\cancel{8} \cdot n \cdot \cancel{x} \cdot e^x = \cancel{8} \cdot \cancel{x} \cdot e^{nx}$ dus $n = \frac{e^{nx}}{e^x} = e^{nx-x} = e^{x(n-1)}$. *En hier links en rechts de* ln *nemen*:

$\ln n = x(n-1)$ uitwerken tot: $x = \frac{\ln n}{n-1} = \frac{1}{n-1}\ln n$

2010-II Exponentiële functie

De grafieken van $g_3(x) = \dfrac{24x}{e^{3x}}$ en $f(x) = \dfrac{8x}{e^{x}}$ sluiten een vlakdeel in.

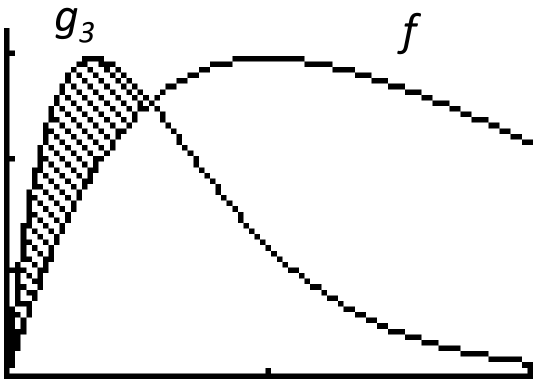


Vraag 9. Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

Antwoord: Je hoeft niet te primitiveren.

2010-II Exponentiële functie

De grafieken van $g_3(x) = \dfrac{24x}{e^{3x}}$ en $f(x) = \dfrac{8x}{e^{x}}$ sluiten een vlakdeel in.



Vraag 9. Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

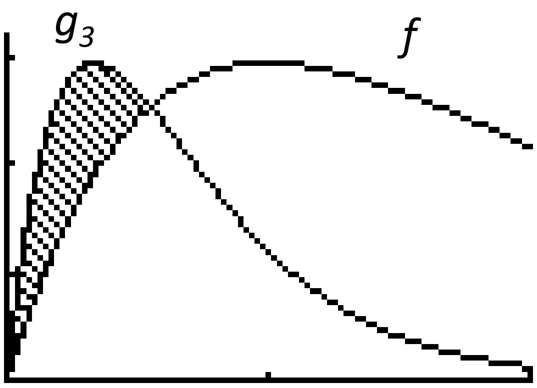
Antwoord: Je hoeft niet te primitiveren.

Blijkens de vorige vraag ligt het snijpunt

van de grafieken bij: $x = 0{,}5\ln 3 \approx 0{,}5493$.

2010-II Exponentiële functie

De grafieken van $g_3(x) = \dfrac{24x}{e^{3x}}$ en $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$ sluiten een vlakdeel in.



Vraag 9. Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

Antwoord: Je hoeft niet te primitiveren.

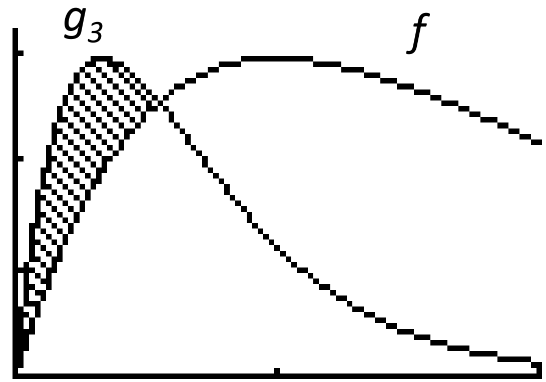
Blijkens de vorige vraag ligt het snijpunt

van de grafieken bij: $x = 0{,}5\ln 3 \approx 0{,}5493$.

Het gaat dus om de integraal:

2010-II   Exponentiële functie

De grafieken van $g_3(x) = \dfrac{24x}{e^{3x}}$ en $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$ sluiten een vlakdeel in.



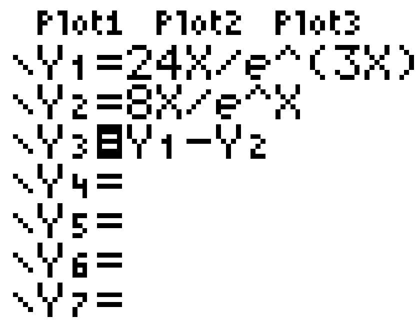
Vraag 9. Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

Antwoord: Je hoeft niet te primitiveren.

Blijkens de vorige vraag ligt het snijpunt

van de grafieken bij: $x = 0{,}5\ln 3 \approx 0{,}5493$.

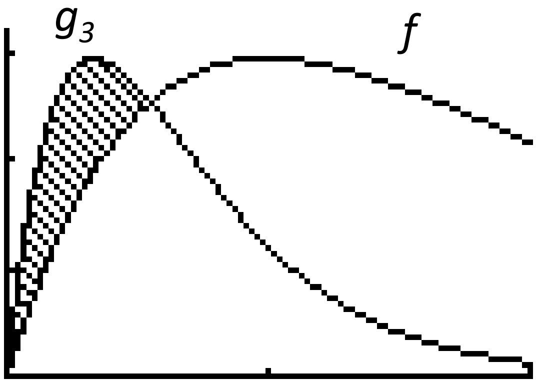
Het gaat dus om de integraal $\displaystyle\int_0^{0{,}5\ln 3} \left(\frac{24x}{e^{3x}} - \frac{8x}{e^x}\right) dx$



2010-II Exponentiële functie

De grafieken van $g_3(x) = \dfrac{24x}{e^{3x}}$ en $f(x) = \dfrac{8x}{e^x}$

sluiten een vlakdeel in.



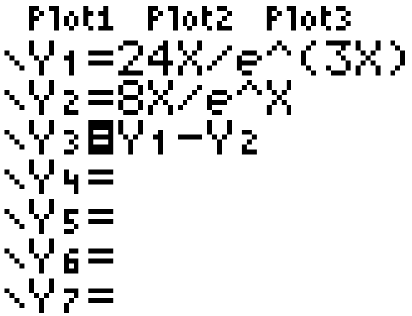
Vraag 9. Bereken de oppervlakte van dit vlakdeel.

Antwoord: Je hoeft niet te primitiveren.

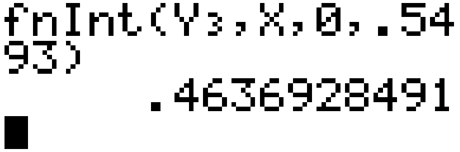
Blijkens de vorige vraag ligt het snijpunt

van de grafieken bij: $x = 0{,}5\ln 3 \approx 0{,}5493$.

Het gaat dus om de integraal $\displaystyle\int_0^{0{,}5\ln 3} \left(\frac{24x}{e^{3x}} - \frac{8x}{e^x}\right) dx$



In TI-84 taal: fnInt(24X/e^(3X) – 8X/e^X, X, 0, 0.5493)



Met het antwoord: opp. ≈ 0,4637

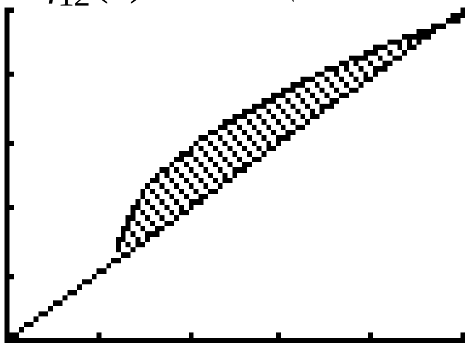
2010-II   Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$

In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

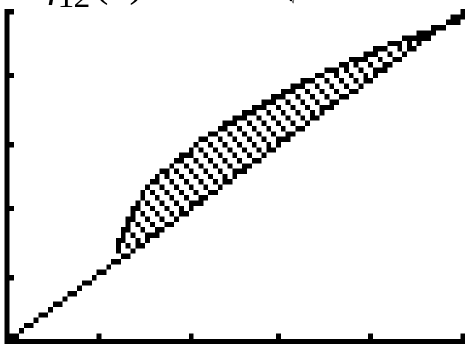
Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

$f_{12}(x) = 12 + 6\sqrt{x-12}$



2010-II Wortelfuncties

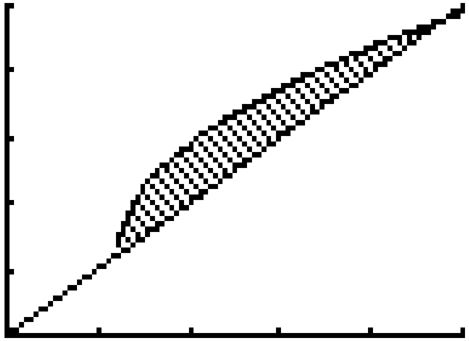
Voor n = 1, 2, 3, . . . is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.



Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

2010-II Wortelfuncties



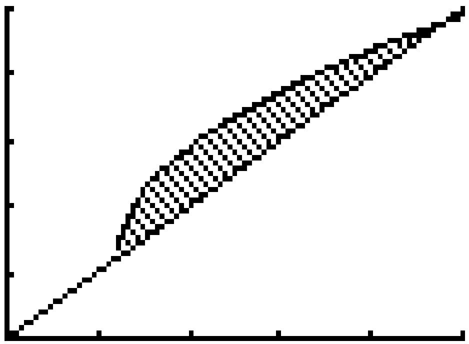
Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken):

2010-II Wortelfuncties



Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

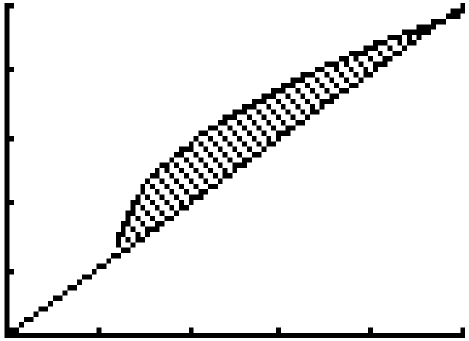
Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x - 12)} = x - 12$

2010-II Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.



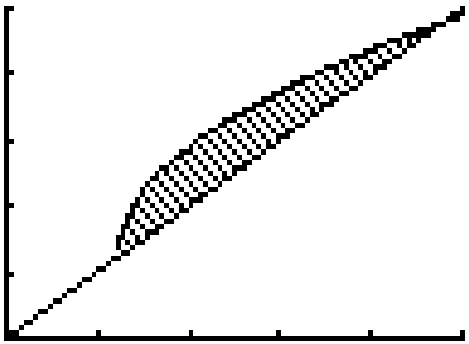
Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x - 12)} = x - 12$

Kwadrateren:

2010-II Wortelfuncties



Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

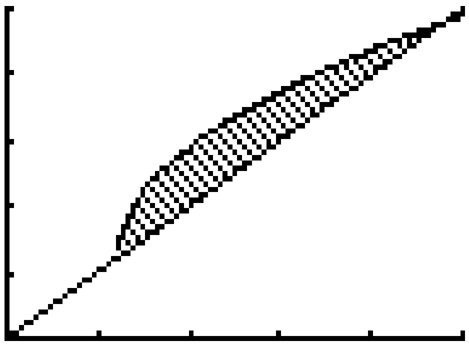
Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x - 12)} = x - 12$

Kwadrateren: $36(x - 12) = (x - 12)^2$

2010-II Wortelfuncties



Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

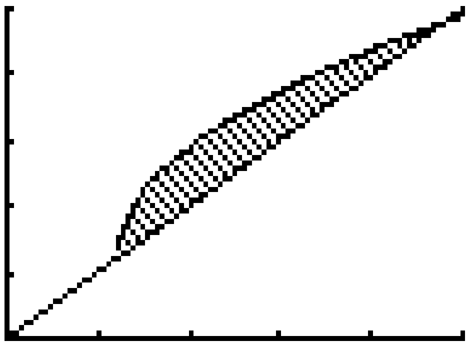
Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x - 12)} = x - 12$

Kwadrateren: $36(x - 12) = (x - 12)^2 = (x - 12)\cdot(x - 12)$

2010-II   Wortelfuncties



Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$

In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12} .

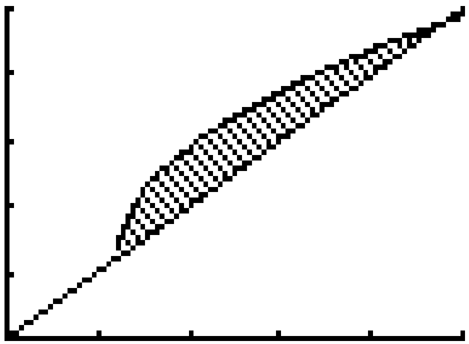
Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x-12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x-12)} = x - 12$

Kwadrateren: $36\cancel{(x-12)} = (x-12)^2 = \cancel{(x-12)} \cdot (x-12)$

De eerste oplossing is $x = 12$ en de tweede oplossing volgt uit

2010-II Wortelfuncties



Voor n = 1, 2, 3, . . . is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

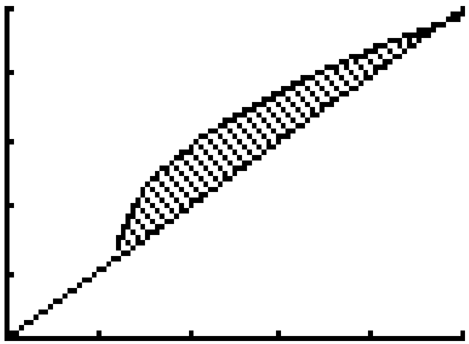
De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x - 12)} = x - 12$

Kwadrateren: $36\cancel{(x - 12)} = (x - 12)^2 = \cancel{(x - 12)} \cdot (x - 12)$

De eerste oplossing is $x = 12$ en de tweede oplossing volgt uit $36 = x - 12$ dus $x = 48$.

De oppervlakte is:

2010-II Wortelfuncties



Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x-12)} = x$

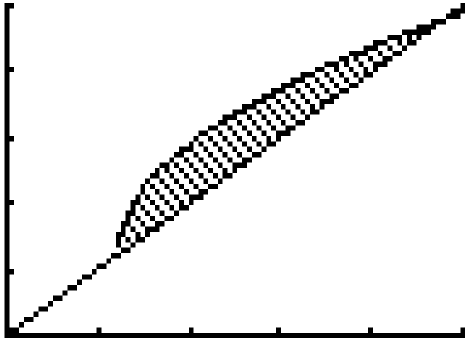
De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x-12)} = x - 12$

Kwadrateren: $36\cancel{(x-12)} = (x-12)^2 = \cancel{(x-12)} \cdot (x-12)$

De eerste oplossing is $x = 12$ en de tweede oplossing volgt uit $36 = x - 12$ dus $x = 48$.

De oppervlakte is: $\int_{12}^{48} (12 + 6\sqrt{x-12} - x)\, dx =$

2010-II Wortelfuncties



Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$

In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.

Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x-12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x-12)} = x - 12$

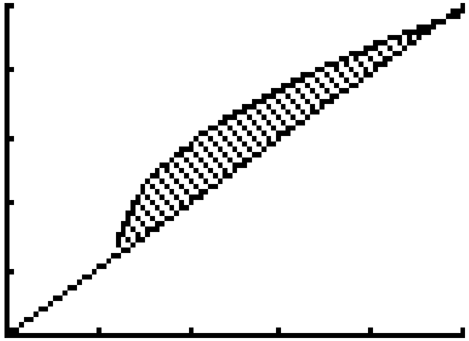
Kwadrateren: $36\cancel{(x-12)} = (x-12)^2 = \cancel{(x-12)} \cdot (x-12)$

De eerste oplossing is $x = 12$ en de tweede oplossing volgt uit $36 = x - 12$ dus $x = 48$.

De oppervlakte is: $\int_{12}^{48} (12 + 6\sqrt{x-12} - x)\,dx = \left[12x + 4(x-12)^{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2\right]_{12}^{48} =$

2010-II Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
In de figuur is f_{12} getekend en de lijn met vergelijking $y = x$.



Vraag 10. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt ingesloten door de lijn $y = x$ en de grafiek van f_{12}.

Eerst het snijpunt berekenen via: $12 + 6\sqrt{(x - 12)} = x$

De wortel isoleren (vrijmaken): $6\sqrt{(x - 12)} = x - 12$

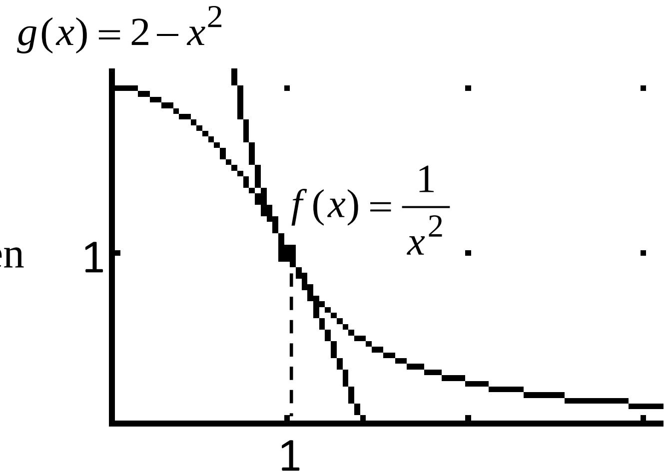
Kwadrateren: $36\cancel{(x - 12)} = (x - 12)^2 = \cancel{(x - 12)} \cdot (x - 12)$

De eerste oplossing is $x = 12$ en de tweede oplossing volgt uit $36 = x - 12$ dus $x = 48$.

De oppervlakte is: $\int_{12}^{48} (12 + 6\sqrt{x-12} - x)\, dx = \left[12x + 4(x-12)^{1\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_{12}^{48} = 216$

Een primitieve van $\sqrt{x-12}$ dus $(x-12)^{\frac{1}{2}}$ is: $\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(x-12)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}(x-12)^{1\frac{1}{2}}$

2010-II voorafgaand aan vraag 11



Twee grafieken *f* en *g* *raken* elkaar in het punt (a, b) als op die plaats:

- De *y*-coördinaten gelijk zijn: $f(a) = g(a)$ en bovendien
- De hellingen gelijk zijn: $f'(a) = g'(a)$

Een voorbeeld (zie het plaatje):

De grafiek van $f(x) = \frac{1}{x^2}$ raakt de grafiek van $g(x) = 2 - x^2$ in het punt (1, 1) immers:

- $f(1) = \frac{1}{1^2} = 1$ en $g(1) = 2 - 1^2 = 1 = f(1)$
- $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ dus $f'(1) = -\frac{2}{1^3} = -2$ *en* $g'(x) = -2x$ *dus* $g'(1) = -2 \cdot 1 = f'(1)$

2010-II Wortelfuncties

Voor n = 1, 2, 3, . . . is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 9$

Vraag 11. Bewijs dat voor elke waarde van n de grafiek van f_n de lijn k raakt in het punt met $x = n + 9$.

Oplossing: Voor het raken van grafieken f en g geldt in het raakpunt: $f = g$ *en* $f' = g'$

2010-II Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 9$

Vraag 11. Bewijs dat voor elke waarde van n de grafiek van f_n de lijn k raakt in het punt met $x = n + 9$.

Oplossing: Voor het raken van grafieken f en g geldt in het raakpunt: $f = g$ *en* $f' = g'$

Het punt (n+9, n+18) ligt op beide grafieken want:

- $f_n(n+9) =$
- op de lijn k is $y = x + 9 = \ldots$

2010-II Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x - n}$
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 9$

Vraag 11. Bewijs dat voor elke waarde van n de grafiek van f_n de lijn k raakt in het punt met $x = n + 9$.

Oplossing: Voor het raken van grafieken f en g geldt in het raakpunt: $f = g$ *en* $f' = g'$

Het punt $(n+9, n+18)$ ligt op beide grafieken want:

- $f_n(n+9) = n + 6\sqrt{(n+9) - n)} = n + 6\sqrt{9} = n + 18$
- op de lijn k is $y = x + 9 = n + 9 + 9 = n + 18$

2010-II Wortelfuncties

Voor n = 1, 2, 3, . . . is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 9$

Vraag 11. Bewijs dat voor elke waarde van n de grafiek van f_n de lijn k raakt in het punt met $x = n + 9$.

Oplossing: Voor het raken van grafieken f en g geldt in het raakpunt: $f = g$ *en* $f' = g'$

Het punt (n+9, n+18) ligt op beide grafieken want:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f_n(n+9) = n + 6\sqrt{(n+9)-n)} = n + 6\sqrt{9} = n+18 \\[2ex] \bullet\ \text{op de lijn } k \text{ is } y = x + 9 = n + 9 + 9 = n + 18 \end{array}\right\}$$

De hellingen in dat punt zijn ook gelijk want:

2010-II Wortelfuncties

Voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ is gegeven het stelsel: $f_n(x) = n + 6\sqrt{x-n}$
Verder is gegeven de lijn k met vergelijking $y = x + 9$

Vraag 11. Bewijs dat voor elke waarde van n de grafiek van f_n de lijn k raakt in het punt met $x = n + 9$.

Oplossing: Voor het raken van grafieken f en g geldt in het raakpunt: $f = g$ *en* $f' = g'$

Het punt $(n+9, n+18)$ ligt op beide grafieken want:

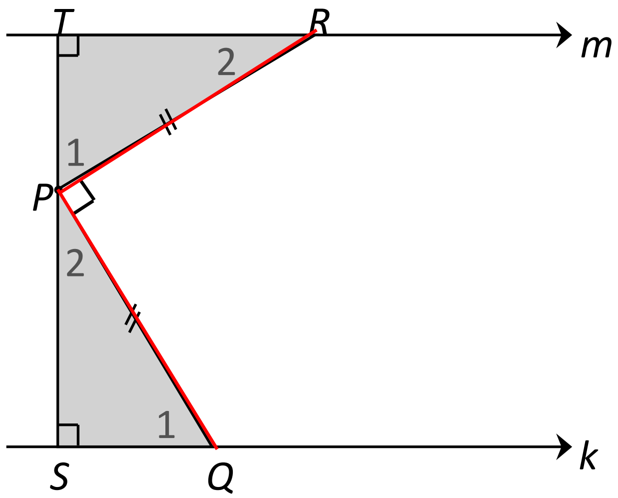
- $f_n(n+9) = n + 6\sqrt{(n+9)-n)} = n + 6\sqrt{9} = n+18$
- op de lijn k is $y = x + 9 = n + 9 + 9 = n + 18$

De hellingen in dat punt zijn ook gelijk want:

- $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-n}}$ dus $f'(n+9) = \dfrac{3}{\sqrt{\cancel{n}+9-\cancel{n}}} = 1$
- en de helling van de lijn $y = 1 \cdot x + 9$ is ook 1

2010-II Geodriehoek

Gegeven: $\angle T = \angle S = 90^o$, $PR = PQ$, $k \,//\, m$ en $\angle P = 90^o$.



Vraag 12. Bewijs dat ΔPQS congruent is met ΔRPT.

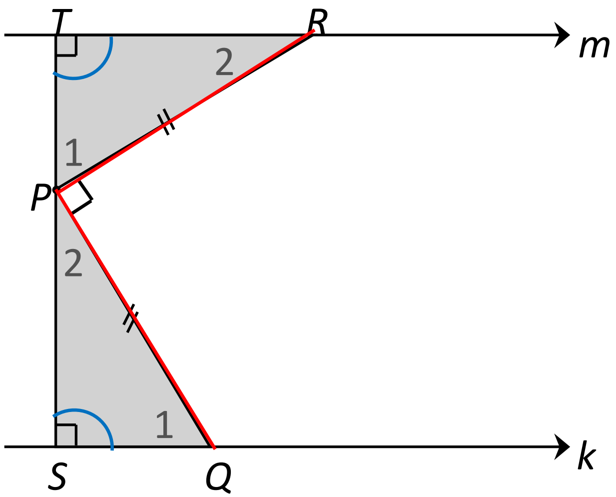
Bewijs:

- $PR = PQ$ (gegeven) (*Z*)

2010-II Geodriehoek

Gegeven: $\angle T = \angle S = 90^{o}$, $PR = PQ$, $k \mathbin{//} m$ en $\angle P = 90^{o}$.

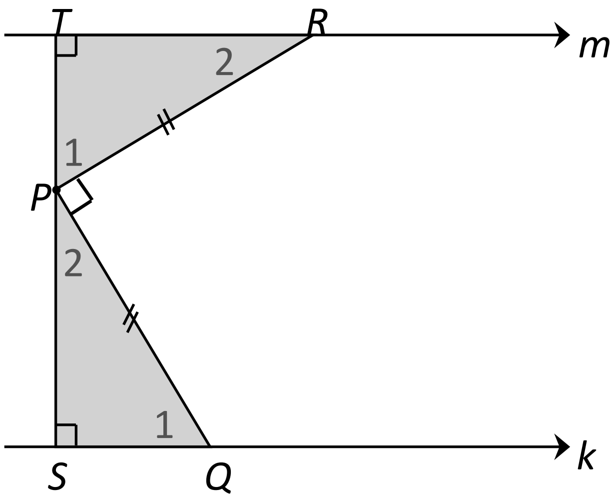
Vraag 12. Bewijs dat ΔPQS congruent is met ΔRPT.



Bewijs:

- $PR = PQ$ (gegeven) (Z)
- $\angle T = \angle S$ (gegeven) (H)

2010-II Geodriehoek



Gegeven: $\angle T = \angle S = 90^o$, $PR = PQ$, $k \,//\, m$ en $\angle P = 90^o$.

Vraag 12. Bewijs dat ΔPQS congruent is met ΔRPT.

Bewijs:

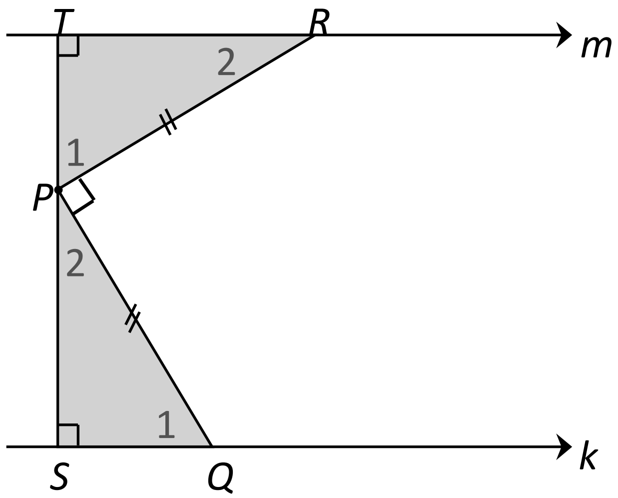
- $PR = PQ$ (gegeven) (Z)
- $\angle T = \angle S$ (gegeven) (H)

We zoeken nu nog een hoek die gelijk is in beide driehoeken. Er geldt:

- $\angle P1 + 90^o + \angle P2 = 180^o$ (*gestrekte hoek*) dus $\angle P1 = 90^o - \angle P2$

.

2010-II Geodriehoek



Gegeven: $\angle T = \angle S = 90^o$, $PR = PQ$, $k \,//\, m$ en $\angle P = 90^o$.

Vraag 12. Bewijs dat ΔPQS congruent is met ΔRPT.

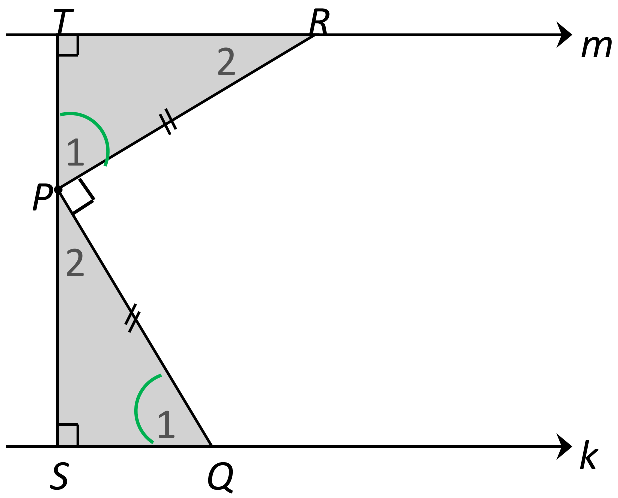
Bewijs:

- $PR = PQ$ (gegeven) (Z)
- $\angle T = \angle S$ (gegeven) (H)

We zoeken nu nog een hoek die gelijk is in beide driehoeken. Er geldt:

- $\angle P1 + 90^o + \angle P2 = 180^o$ (*gestrekte hoek*) dus $\angle P1 = 90^o - \angle P2$
- Maar ook: $\angle Q1 = 90^o - \angle P2$ (*hoekensom* driehoek)

2010-II Geodriehoek



Gegeven: $\angle T = \angle S = 90^{o}$, $PR = PQ$, $k \,//\, m$ en $\angle P = 90^{o}$.

Vraag 12. Bewijs dat ΔPQS congruent is met ΔRPT.

Bewijs:

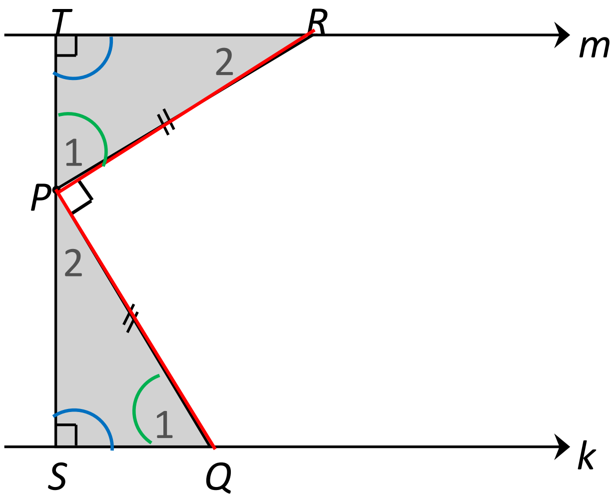
- $PR = PQ$ (gegeven) (Z)
- $\angle T = \angle S$ (gegeven) (H)

We zoeken nu nog een hoek die gelijk is in beide driehoeken. Er geldt:

- $\angle P1 + 90^{o} + \angle P2 = 180^{o}$ (*gestrekte hoek*) dus $\angle P1 = 90^{o} - \angle P2$
- Maar ook: $\angle Q1 = 90^{o} - \angle P2$ (*hoekensom* driehoek)

Dus is $\angle P1 = \angle Q1$ (H)

2010-II Geodriehoek



Gegeven: $\angle T = \angle S = 90^o$, $PR = PQ$, $k \,//\, m$ en $\angle P = 90^o$.

Vraag 12. Bewijs dat ΔPQS congruent is met ΔRPT.

Bewijs:

- $PR = PQ$ (gegeven) (Z)
- $\angle T = \angle S$ (gegeven) (H)

We zoeken nu nog een hoek die gelijk is in beide driehoeken. Er geldt:

- $\angle P1 + 90^o + \angle P2 = 180^o$ (*gestrekte hoek*) dus $\angle P1 = 90^o - \angle P2$
- Maar ook: $\angle Q1 = 90^o - \angle P2$ (*hoekensom* driehoek)

Dus is $\angle P1 = \angle Q1$ (H)

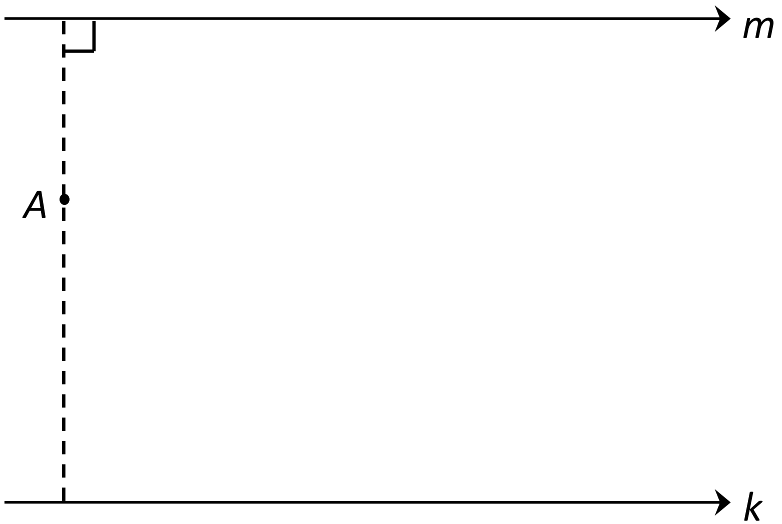
Volgens geval *ZHH* is dus ΔPQS congruent met ΔRPT.

2010-II Geodriehoek

Vraag 13. Getekend zijn zijn twee evenwijdige lijnen *k* en *m* met een punt *A* ertussenin.
Teken in deze figuur een geodriehoek waarvan op elk van deze lijnen *k* en *m* een hoekpunt ligt en waarvan *A* het hoekpunt van de rechte hoek is.

2010-II Geodriehoek

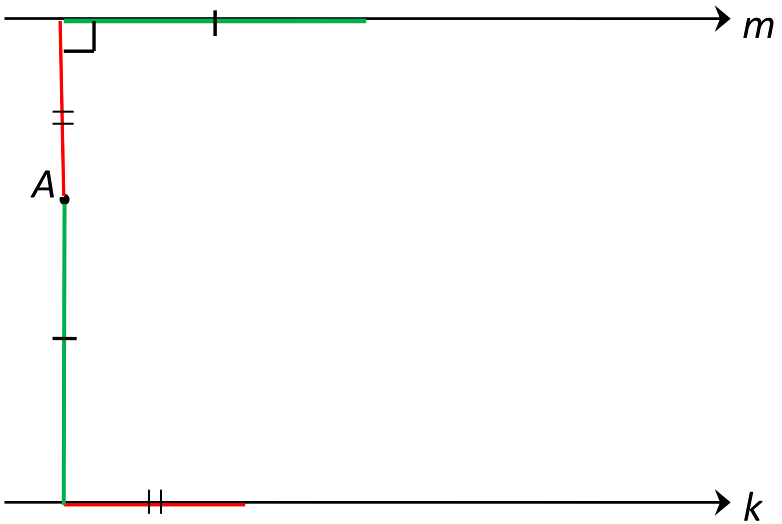
Vraag 13. Getekend zijn zijn twee evenwijdige lijnen k en m met een punt A ertussenin.
Teken in deze figuur een geodriehoek waarvan op elk van deze lijnen k en m een hoekpunt ligt en waarvan A het hoekpunt van de rechte hoek is.



Uitwerking:

Teken door A de loodlijn op k en m.

2010-II Geodriehoek



Vraag 13. Getekend zijn zijn twee evenwijdige lijnen *k* en *m* met een punt *A* ertussenin.
Teken in deze figuur een geodriehoek waarvan op elk van deze lijnen *k* en *m* een hoekpunt ligt en waarvan *A* het hoekpunt van de rechte hoek is.

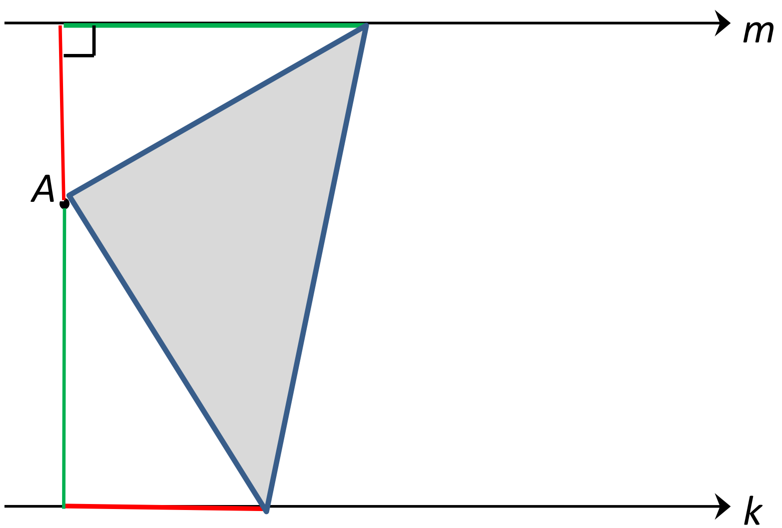
Uitwerking:

Teken door *A* de loodlijn op *k* en *m*.

Pas gelijke stukken af op *k* en *m*, als aangegeven.

2010-II Geodriehoek

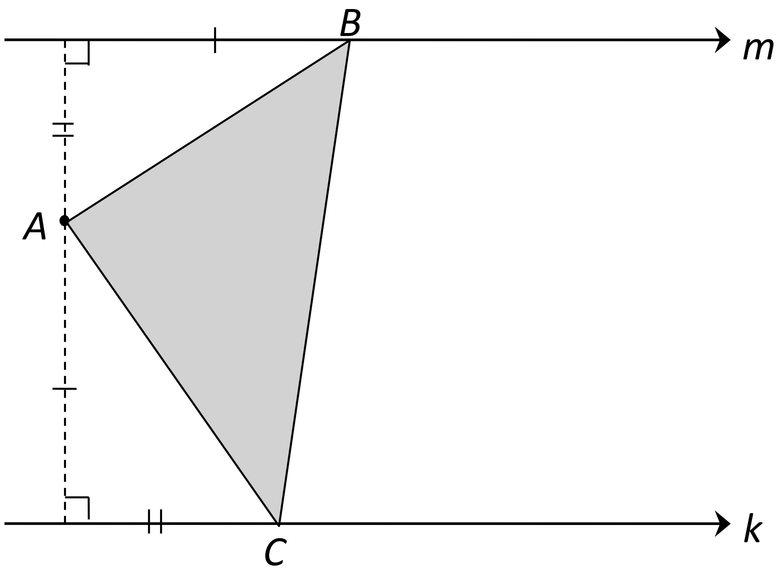
Vraag 13. Getekend zijn zijn twee evenwijdige lijnen *k* en *m* met een punt *A* ertussenin.
Teken in deze figuur een geodriehoek waarvan op elk van deze lijnen *k* en *m* een hoekpunt ligt en waarvan *A* het hoekpunt van de rechte hoek is.



Uitwerking:

Teken door *A* de loodlijn op *k* en *m*.

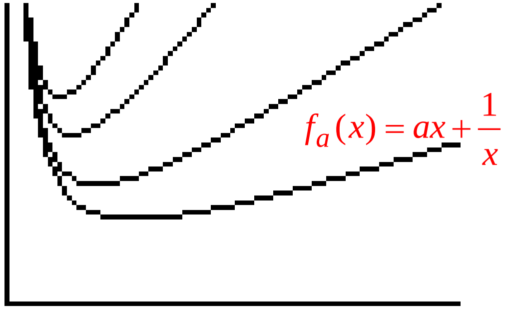
Pas gelijke stukken af op *k* en *m*, als aangegeven.



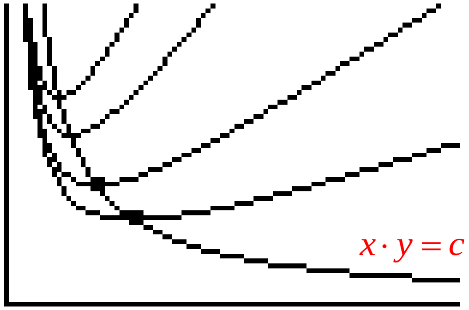
De grijze driehoek *ABC* is een geodriehoek,
want uit de congruentie volgt:
$AB = AC$ en $\angle A = 90^o$.

2010-II Gebroken functie

De grafiek van $f_a(x) = ax + \dfrac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van *a* een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking *xy*=*c* voor een zekere waarde van *c*.

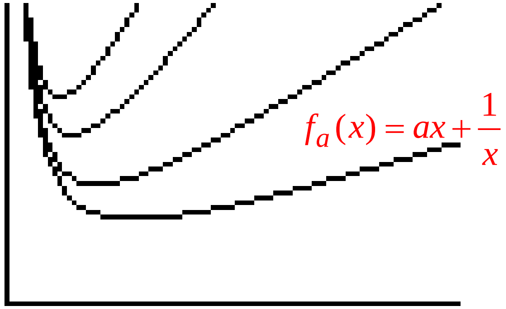


Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking *x*·*y*=*c* liggen en bereken de waarde van *c*.

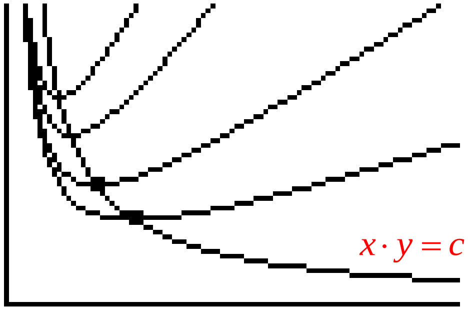


2010-II   Gebroken functie

De grafiek van $f_a(x) = ax + \dfrac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van *a* een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking *xy*=*c* voor een zekere waarde van *c*.

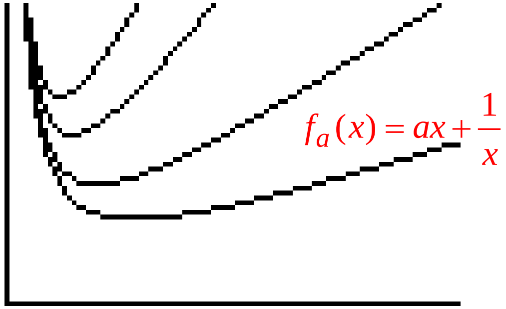


Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $x \cdot y = c$ liggen en bereken de waarde van *c*.

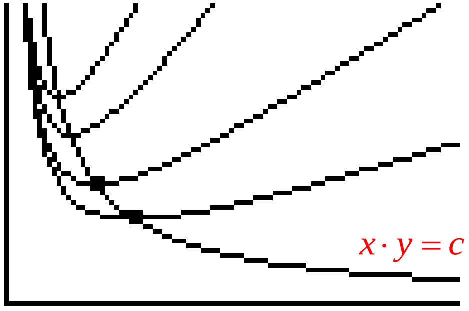


- Voor een top *T* (*x*, *y*) geldt: $f'(x_T) =$

2010-II   Gebroken functie



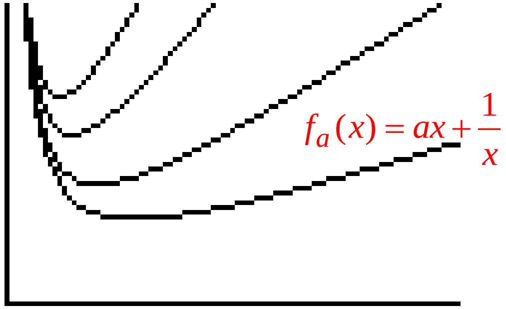
De grafiek van $f_a(x) = ax + \frac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van a een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking $xy=c$ voor een zekere waarde van c.



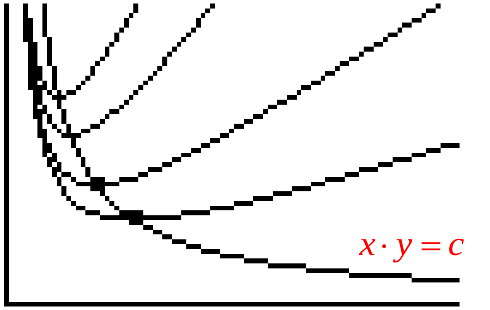
Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $x{\cdot}y=c$ liggen en bereken de waarde van c.

- Voor een top $T\,(x, y)$ geldt: $f'(x_T) = a - \frac{1}{{x_T}^2} = 0$

2010-II Gebroken functie



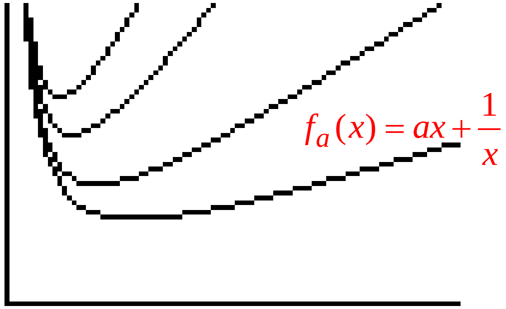
De grafiek van $f_a(x) = ax + \dfrac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van *a* een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking *xy*=*c* voor een zekere waarde van *c*.



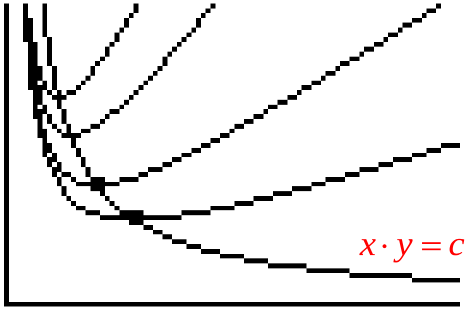
Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking *x*·*y*=*c* liggen en bereken de waarde van *c*.

- Voor een top *T* (*x*, *y*) geldt: $f'(x_T) = a - \dfrac{1}{{x_T}^2} = 0$ dus $a =$

2010-II   Gebroken functie



De grafiek van $f_a(x) = ax + \frac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van a een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking $xy=c$ voor een zekere waarde van c.

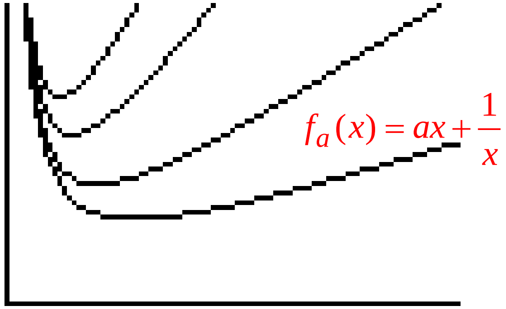


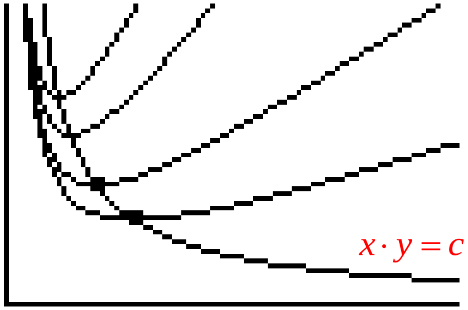
Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $x \cdot y = c$ liggen en bereken de waarde van c.

- Voor een top $T\,(x, y)$ geldt: $f'(x_T) = a - \frac{1}{x_T{}^2} = 0$ dus $a = \frac{1}{x_T{}^2}$

2010-II Gebroken functie

De grafiek van $f_a(x) = ax + \frac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van *a* een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking *xy*=*c* voor een zekere waarde van *c*.



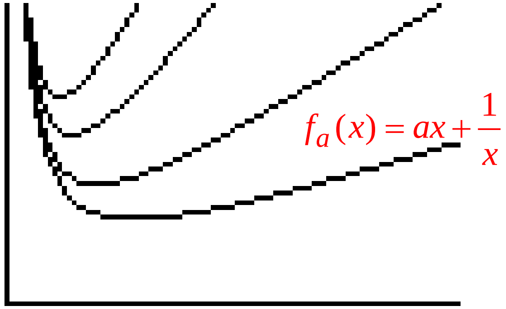


Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking *x*·*y*=*c* liggen en bereken de waarde van *c*.

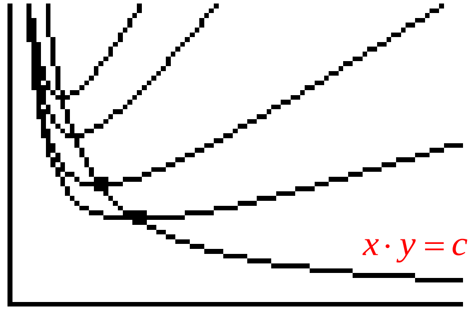
- Voor een top *T* (*x*, *y*) geldt: $f'(x_T) = a - \frac{1}{{x_T}^2} = 0$ dus $a = \frac{1}{{x_T}^2}$
- En ook: $y_T =$

2010-II   Gebroken functie

De grafiek van $f_a(x) = ax + \frac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van a een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking $xy=c$ voor een zekere waarde van c.



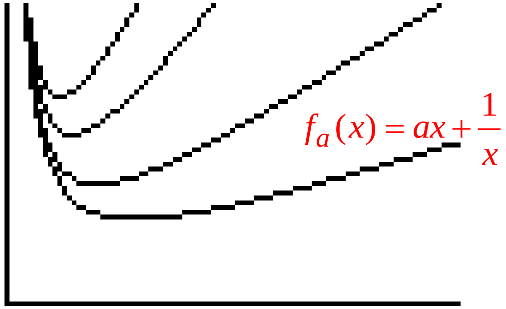
Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $x \cdot y = c$ liggen en bereken de waarde van c.



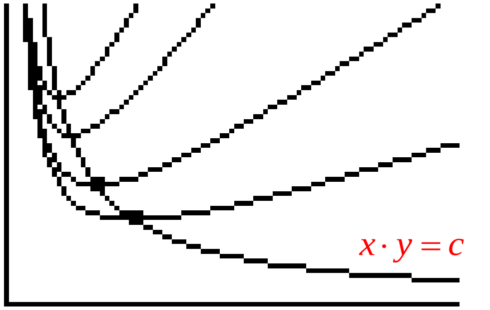
- Voor een top $T(x, y)$ geldt: $f'(x_T) = a - \frac{1}{x_T^{\,2}} = 0$ dus $a = \frac{1}{x_T^{\,2}}$
- En ook: $y_T = a \cdot x_T + \frac{1}{x_T}$

2010-II Gebroken functie

De grafiek van $f_a(x) = ax + \frac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van a een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking $xy=c$ voor een zekere waarde van c.



Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $x \cdot y = c$ liggen en bereken de waarde van c.

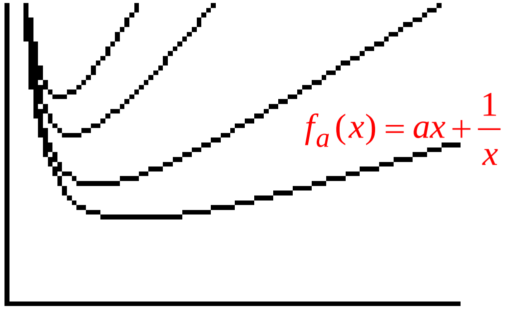


- Voor een top $T(x, y)$ geldt: $f'(x_T) = a - \frac{1}{x_T^{\,2}} = 0$ dus $a = \frac{1}{x_T^{\,2}}$
- En ook: $y_T = a \cdot x_T + \frac{1}{x_T}$

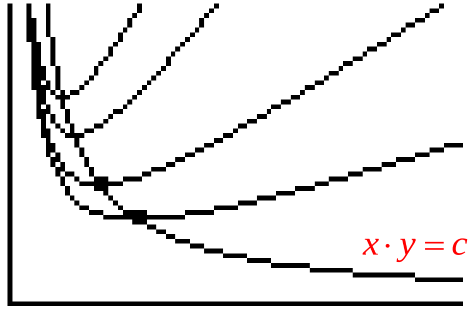
Voor het verband tussen x_T en y_T geldt dus: $y_T = a \cdot x_T + \frac{1}{x_T} = \frac{1}{x_T^{\,2}} \cdot x_T + \frac{1}{x_T} = \ldots$

2010-II Gebroken functie

De grafiek van $f_a(x) = ax + \dfrac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van *a* een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking *xy*=*c* voor een zekere waarde van *c*.



Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking *x*·*y*=*c* liggen en bereken de waarde van *c*.

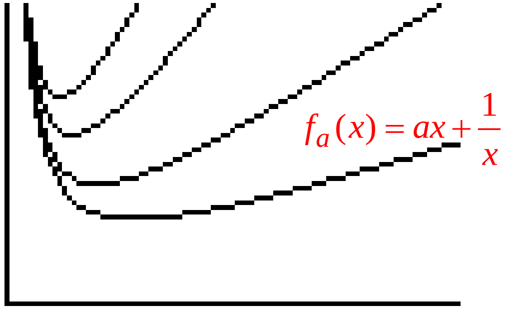


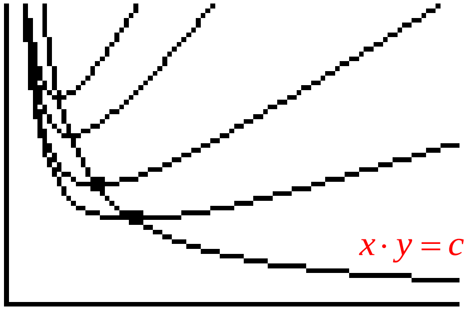
- Voor een top *T* (*x*, *y*) geldt: $f'(x_T) = a - \dfrac{1}{x_T{}^2} = 0$ dus $a = \dfrac{1}{x_T{}^2}$
- En ook: $y_T = a \cdot x_T + \dfrac{1}{x_T}$

Voor het verband tussen x_T en y_T geldt dus: $y_T = a \cdot x_T + \dfrac{1}{x_T} = \dfrac{1}{x_T{}^2} \cdot x_T + \dfrac{1}{x_T} = \dfrac{1}{x_T} + \dfrac{1}{x_T} = \dfrac{2}{x_T}$

Dus $x_T \cdot y_T$ = ... ; de waarde van *c* is dus ...

2010-II Gebroken functie





De grafiek van $f_a(x) = ax + \frac{1}{x}$ heeft voor elke positieve waarde van a een top. Het lijkt erop dat deze toppen liggen op een hyperbool met vergelijking $xy=c$ voor een zekere waarde van c.

Vraag 14. Toon langs algebraïsche weg aan dat de toppen inderdaad op een hyperbool met vergelijking $x{\cdot}y=c$ liggen en bereken de waarde van c.

- Voor een top $T\,(x, y)$ geldt: $f'(x_T) = a - \frac{1}{{x_T}^2} = 0$ dus $a = \frac{1}{{x_T}^2}$
- En ook: $y_T = a \cdot x_T + \frac{1}{x_T}$

Voor het verband tussen x_T en y_T geldt dus: $y_T = a \cdot x_T + \frac{1}{x_T} = \frac{1}{{x_T}^2} \cdot x_T + \frac{1}{x_T} = \frac{1}{x_T} + \frac{1}{x_T} = \frac{2}{x_T}$

Dus $x_T{\cdot}y_T = 2$; de waarde van c is dus 2.

Bij deze hyperbool hoort de functie: $g(x) = \frac{2}{x}$

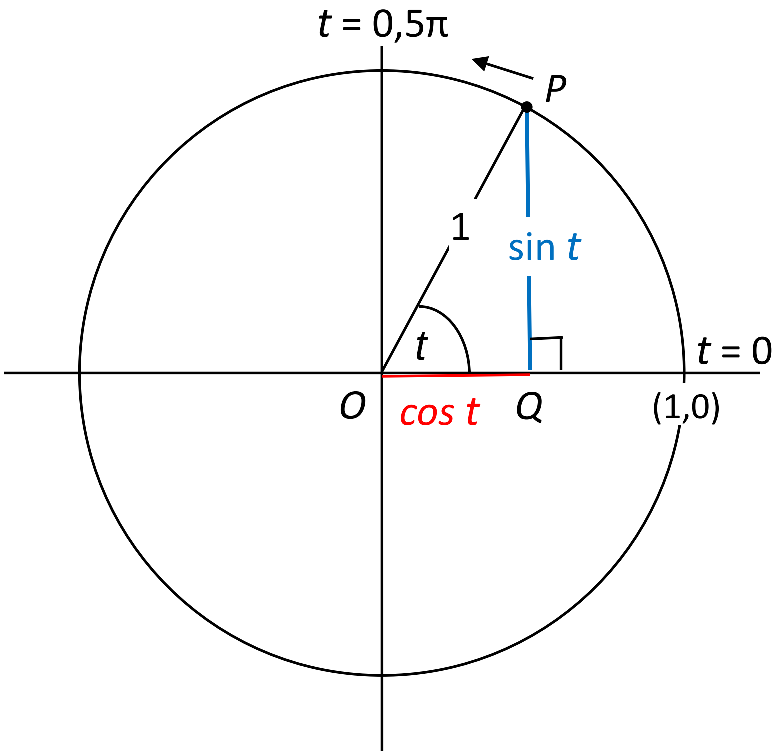
2010-II vooraf aan vraag 17: De eenheidscirkel

De cirkel rond: $360^o = 2\pi$ rad dus $\mathbf{180^o = \pi}$ rad

$$\sin t = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{1} \quad \text{dus} \quad PQ = \sin t$$

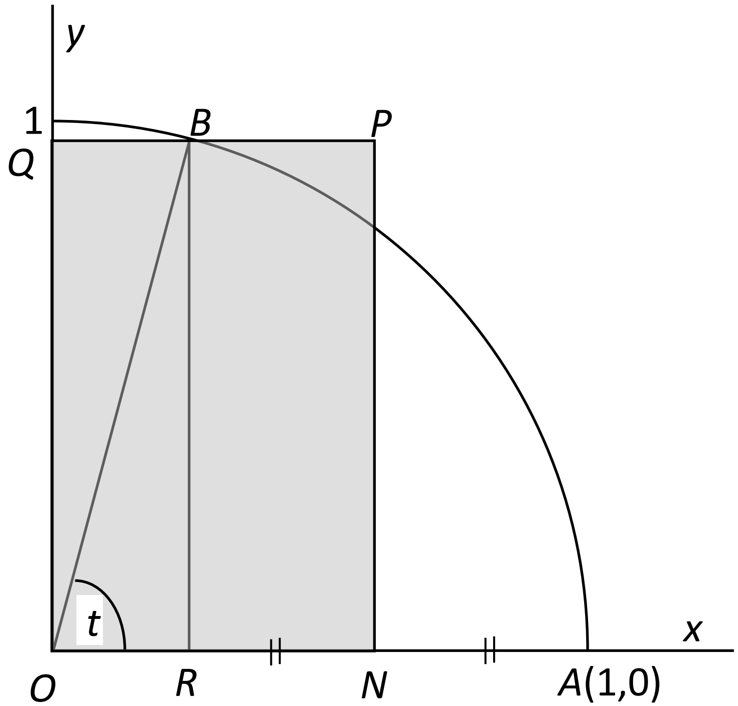
$$\cos t = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{1} \quad \text{dus} \quad OQ = \cos t$$

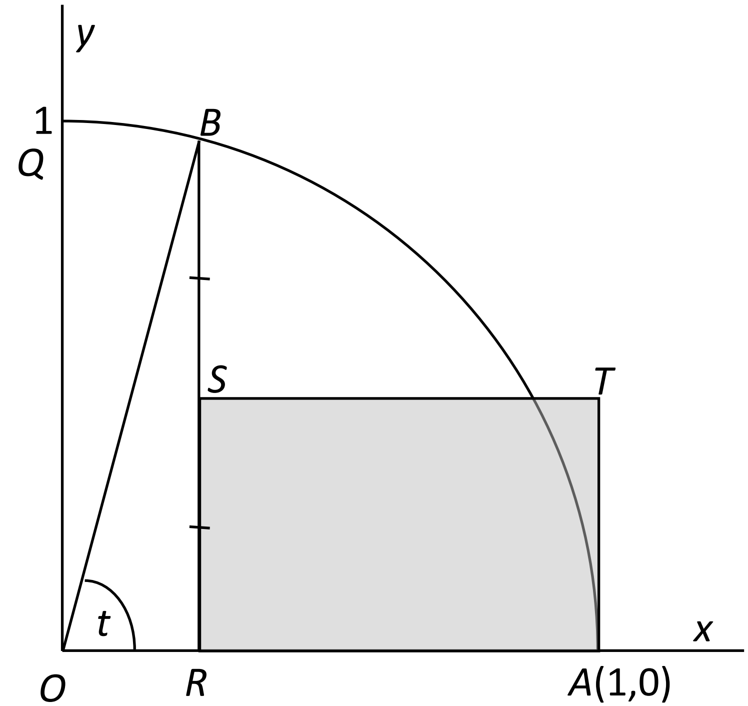
P heeft de coördinaten: ***P*(cos *t*, sin *t*)**



Stelling van Pythagoras: $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$ afgekort: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)





In een rechthoekig assenstelsel *Oxy* bekijken we het deel van de eenheidscirkel dat in het eerste kwadrant ligt. Het snijpunt met de *x*-as is *A*(1, 0). Op de kwartcirkel ligt een willekeurig punt *B*(cos *t*, in *t*) met $\angle AOB = t$ rad en $0 < t < 0{,}5\pi$. Punt *R* is de loodrechte projectie van *B* op de *x*-as.

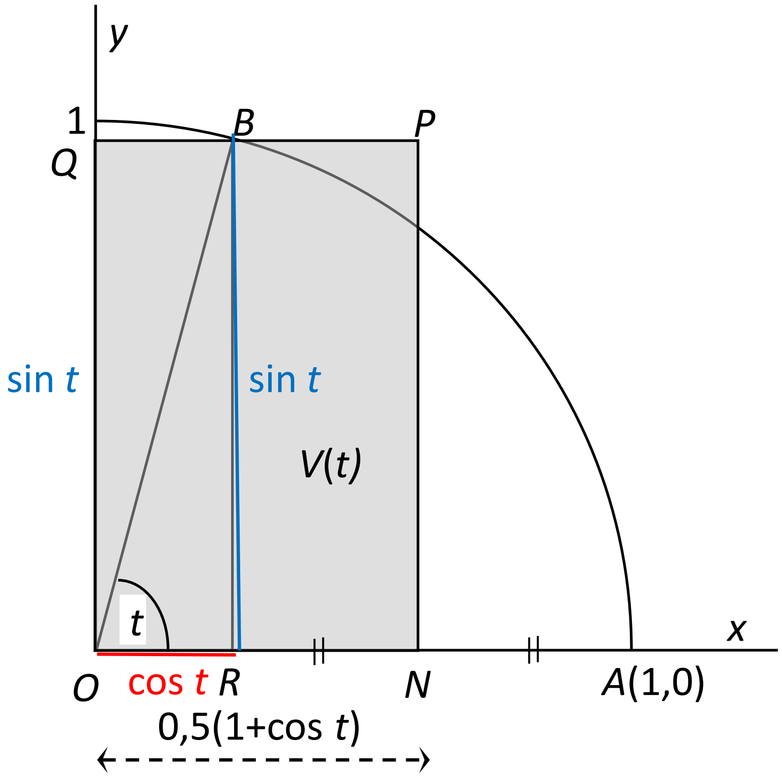
We maken nu twee rechthoeken:

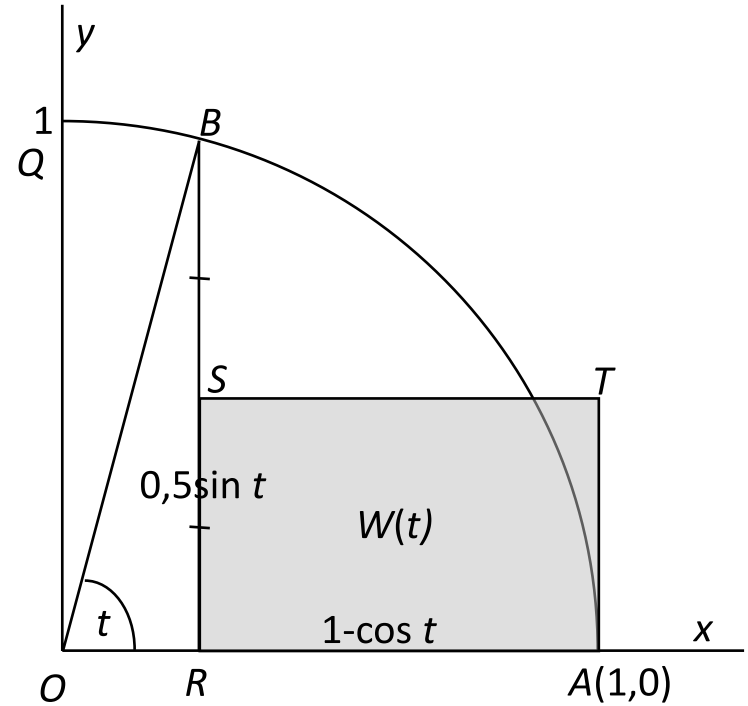
I. Een rechthoek *ONPQ*, waarbij *N* het midden van *AR* is en *P* en *Q* op dezelfde hoogte als *B* liggen.
$OQ = \sin t$ en $ON = 0{,}5(1 + \cos t)$. De oppervlakte van deze rechthoek noemen we $V(t)$.

I. II. Een rechthoek *ATSR*, waarbij *S* het midden van *BR* is. $RS = 0{,}5\sin t$ en $RA = 1 - \cos t$.

De oppervlakte van deze rechthoek noemen we $W(t)$.

2010-II   Kwartcirkel (goniometrie)





In een rechthoekig assenstelsel *Oxy* bekijken we het deel van de eenheidscirkel dat in het eerste kwadrant ligt. Het snijpunt met de *x*-as is *A*(1, 0). Op de kwartcirkel ligt een willekeurig punt *B*(cos *t*, in *t*) met $\angle AOB = t$ rad en $0 < t < 0{,}5\pi$. Punt *R* is de loodrechte projectie van *B* op de *x*-as.

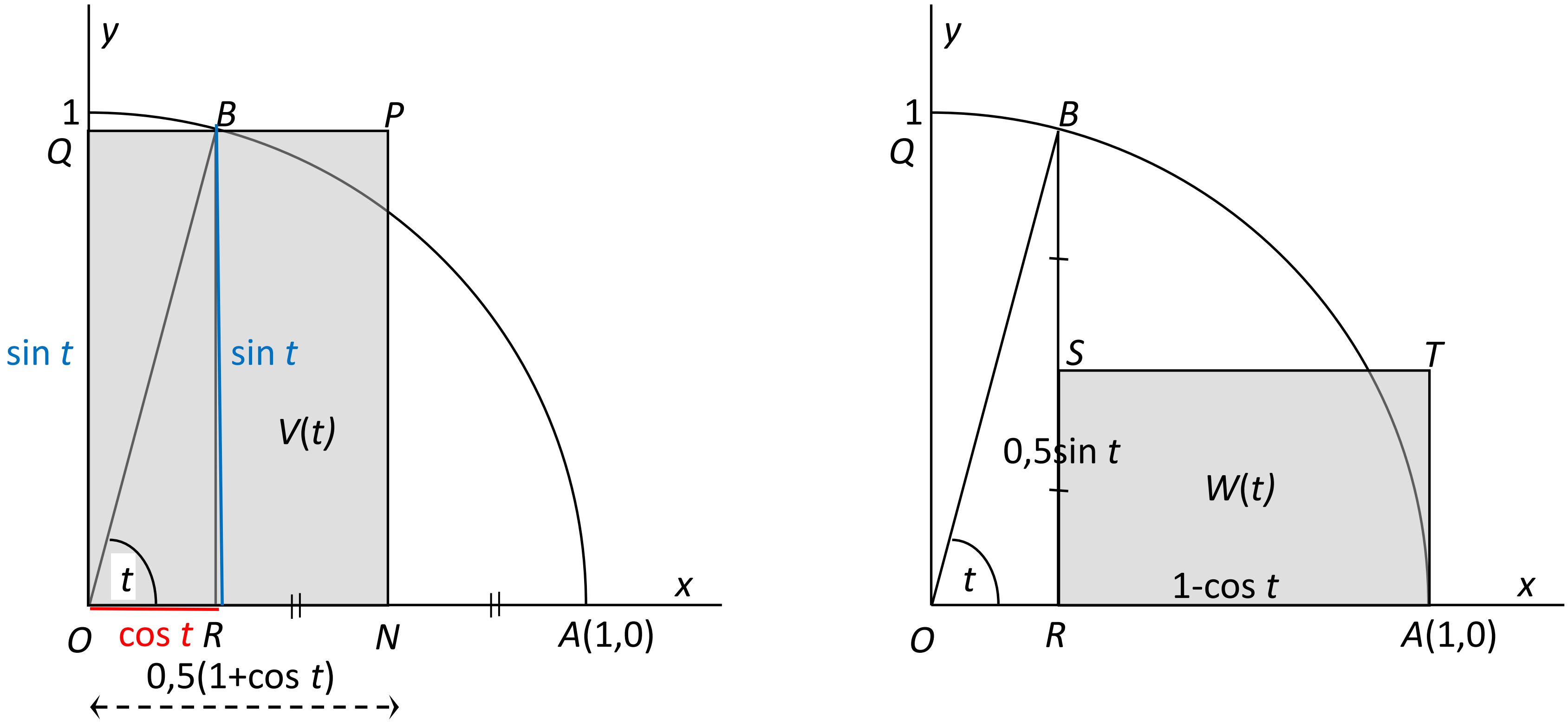
We maken nu twee rechthoeken:

I. Een rechthoek *ONPQ*, waarbij *N* het midden van *AR* is en *P* en *Q* op dezelfde hoogte als *B* liggen. $OQ = \sin t$ en $ON = 0{,}5(1 + \cos t)$. De oppervlakte van deze rechthoek noemen we *V*(*t*) .

I. II. Een rechthoek *ATSR*, waarbij *S* het midden van *BR* is. $\boldsymbol{RS = 0{,}5\sin t}$ en $\boldsymbol{RA = 1 - \cos t}$.

De oppervlakte van deze rechthoek noemen we *W*(*t*).

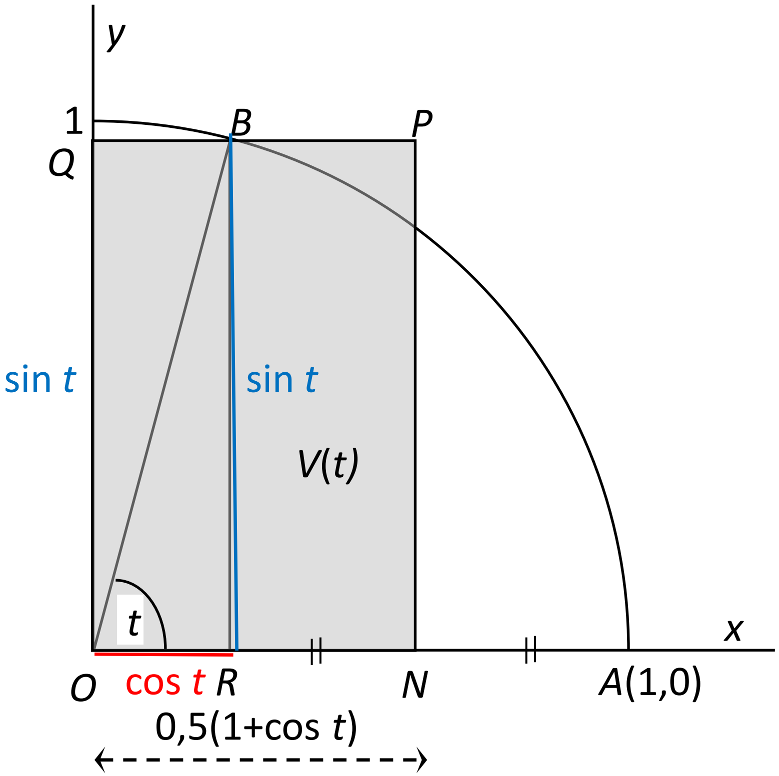
2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

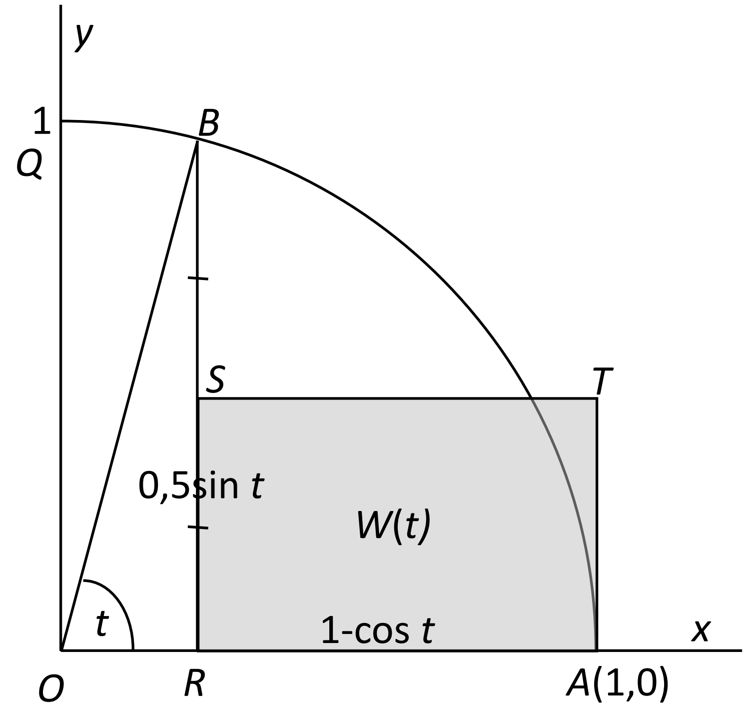


Vraag 15. Bereken exact de waarde van *t* waarvoor geldt: $V(t) = 3 \cdot W(t)$

$\sin t \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos t) = 3 \cdot \frac{1}{2} \sin t \cdot (1 - \cos t) \quad \Leftrightarrow$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

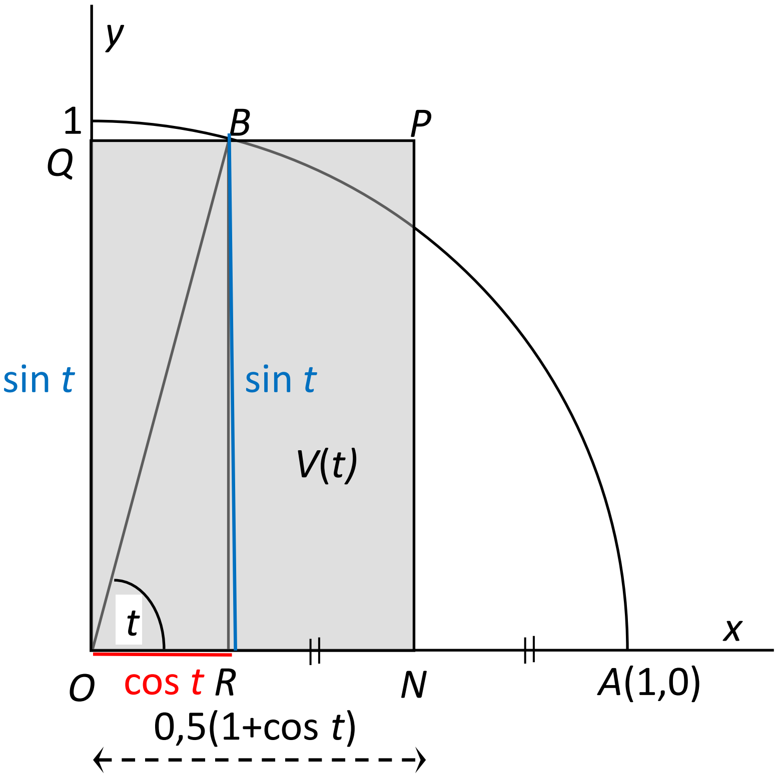


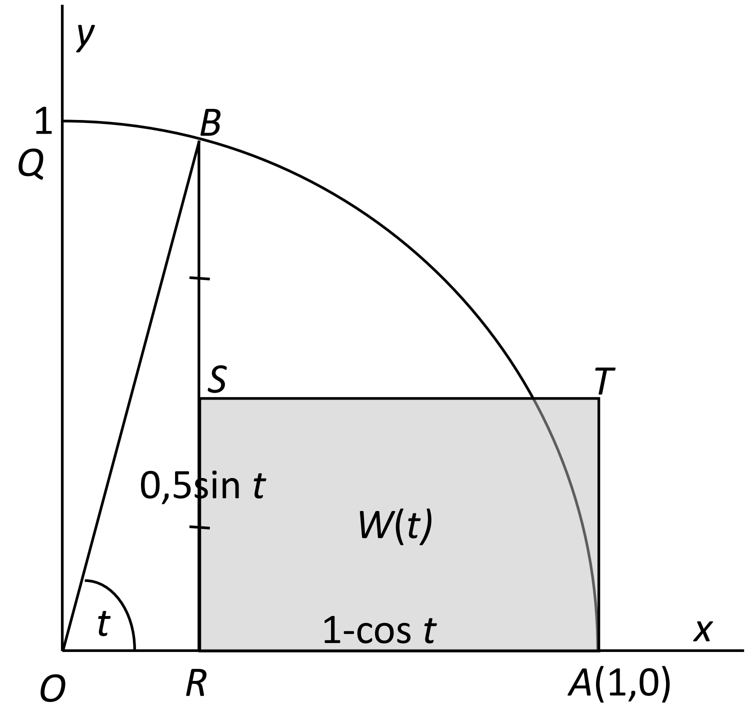


Vraag 15. Bereken exact de waarde van t waarvoor geldt: $V(t) = 3 \cdot W(t)$

$\frac{1}{2}\sin t \cdot (1+\cos t) = 3 \cdot \frac{1}{2}\sin t \cdot (1-\cos t) \quad \Leftrightarrow \quad 1+\cos t = 3-3\cos t \quad \Leftrightarrow$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

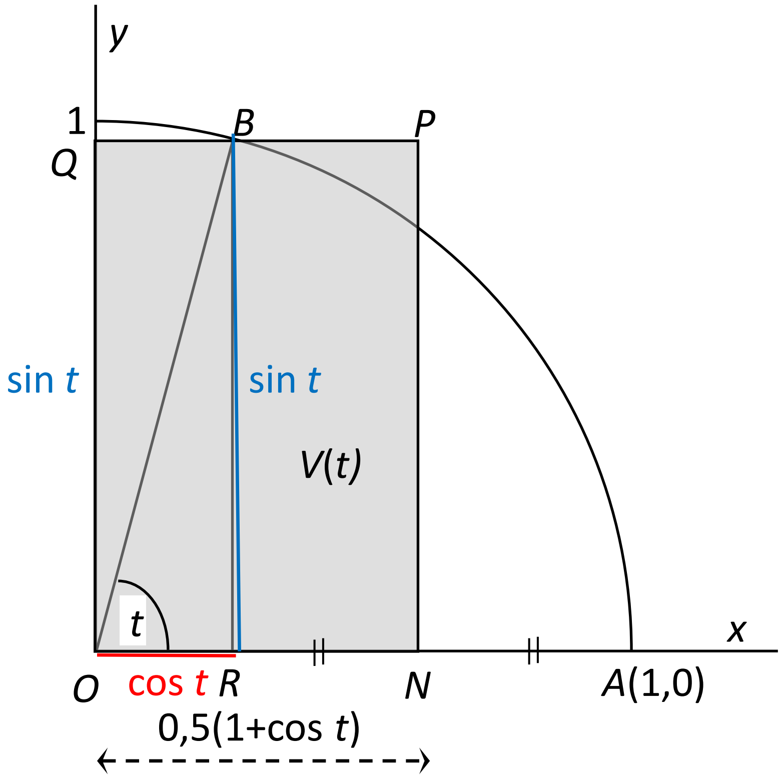


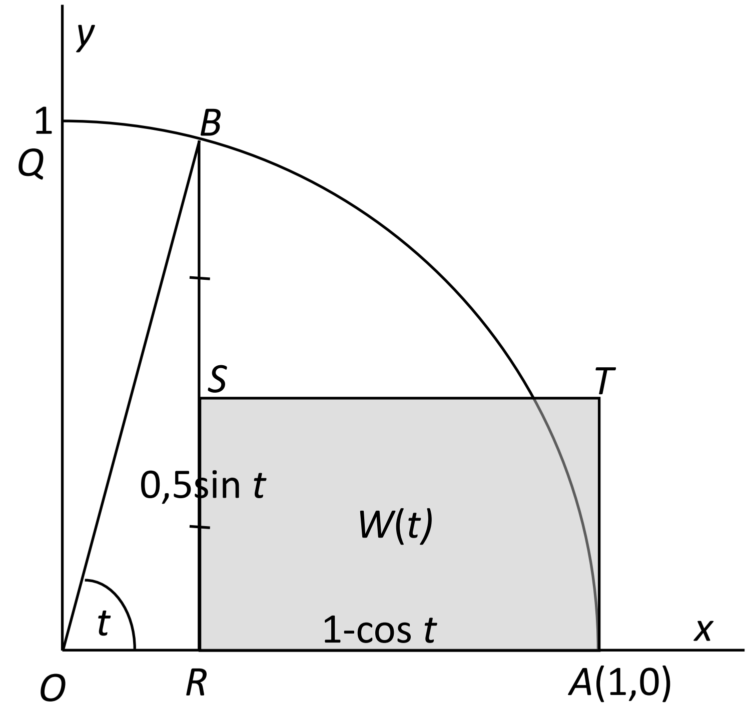


Vraag 15. Bereken exact de waarde van t waarvoor geldt: $V(t) = 3 \cdot W(t)$

$\frac{1}{2}\sin t \cdot (1+\cos t) = 3 \cdot \frac{1}{2}\sin t \cdot (1-\cos t) \Leftrightarrow 1+\cos t = 3-3\cos t \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{2}$ dus $t =$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

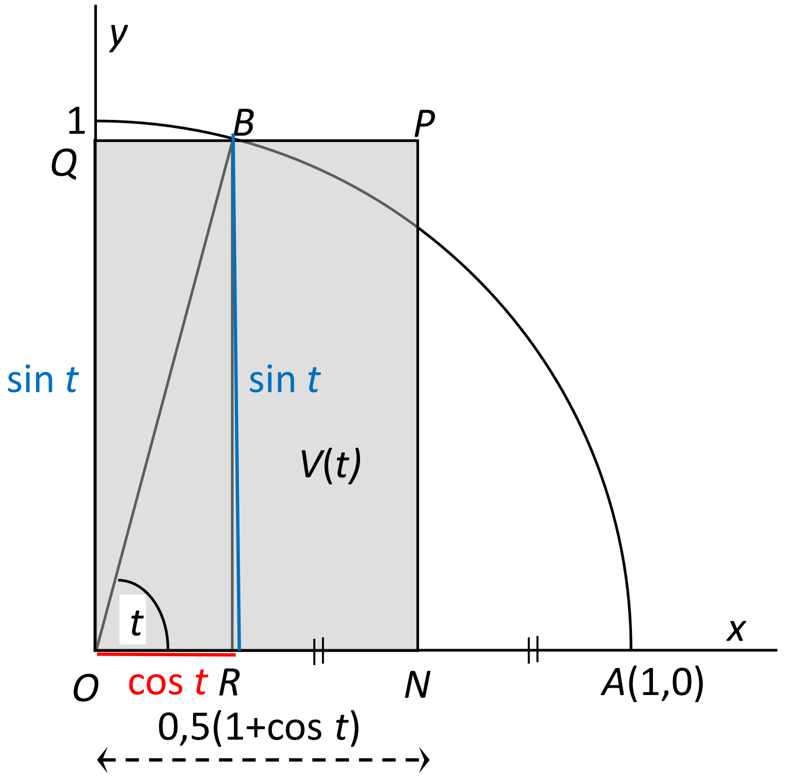


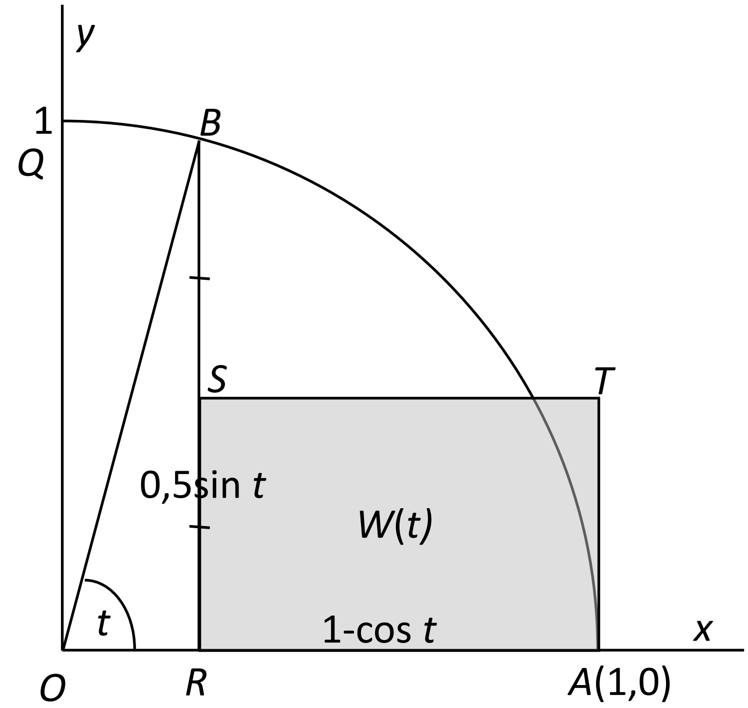


Vraag 15. Bereken exact de waarde van t waarvoor geldt: $V(t) = 3 \cdot W(t)$

$\frac{1}{2}\sin t \cdot (1+\cos t) = 3 \cdot \frac{1}{2}\sin t \cdot (1-\cos t) \quad \Leftrightarrow \quad 1+\cos t = 3-3\cos t \quad \Leftrightarrow \quad \cos t = \frac{1}{2}$ dus $t = \frac{1}{3}\pi$

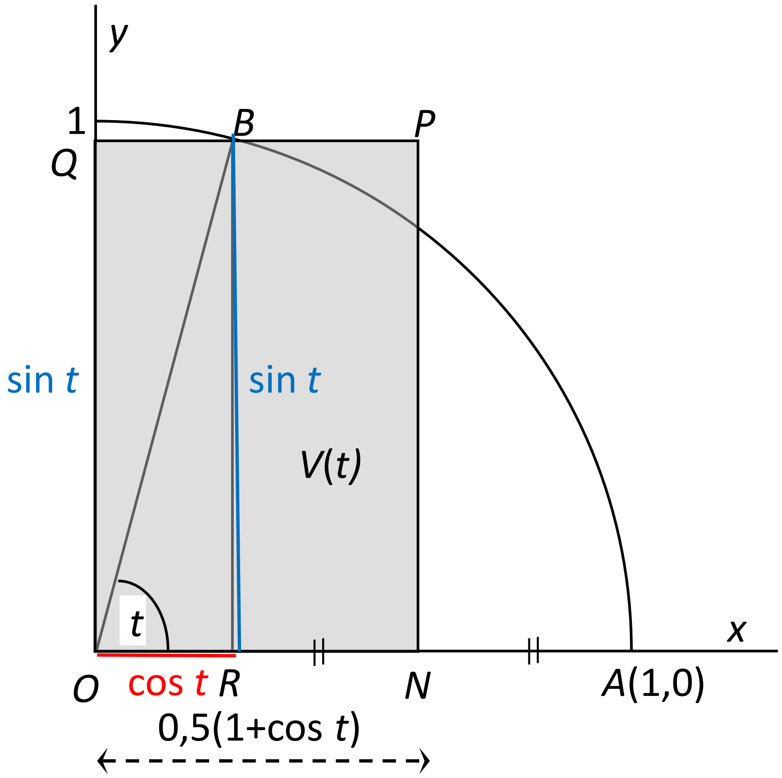
2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

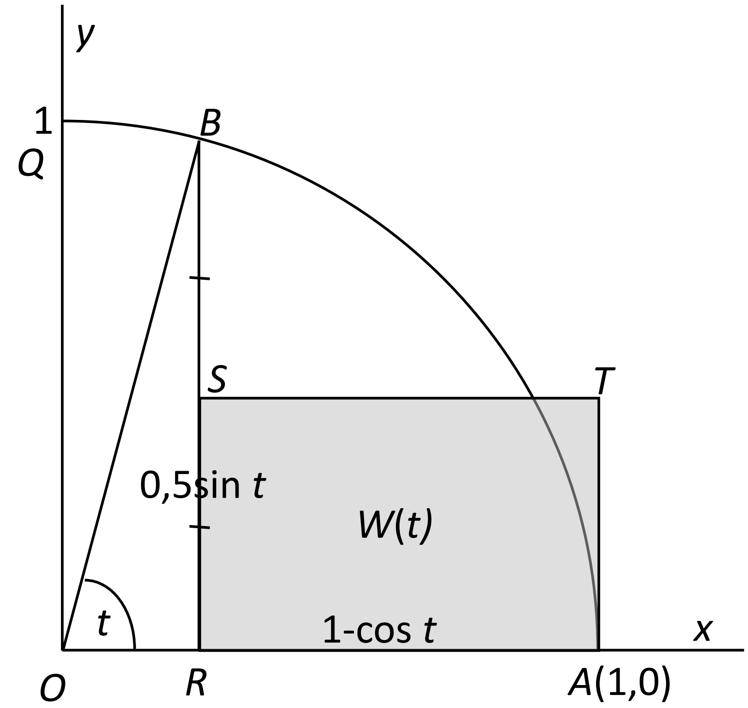




Vraag 16. Te bewijzen: $\dfrac{ON}{OQ} = \dfrac{RS}{RA}$ dus te bewijzen:

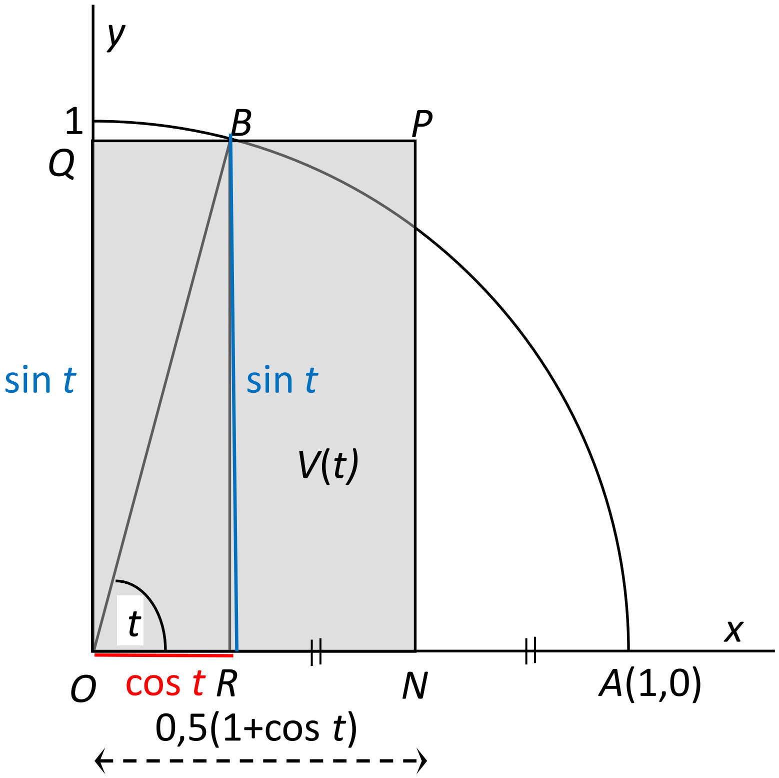
2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

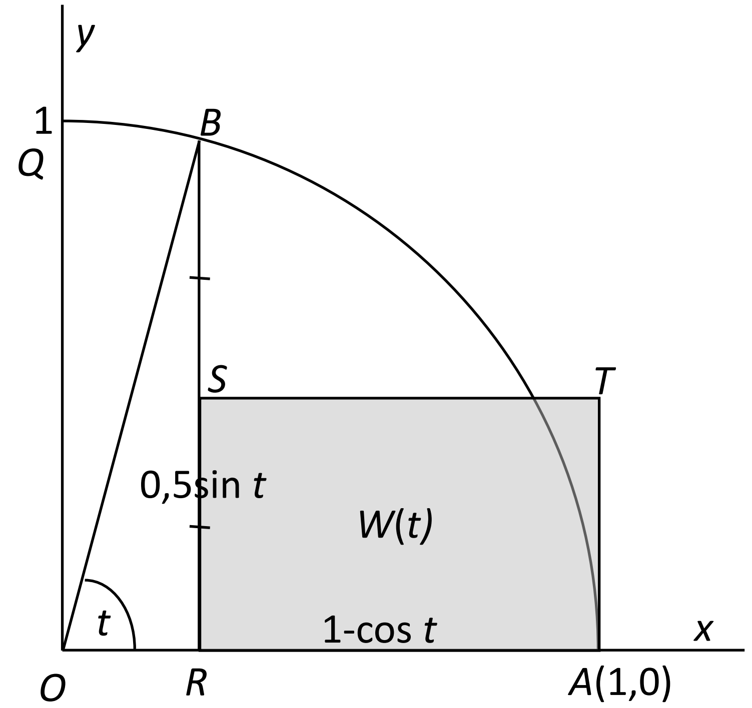




Vraag 16. Te bewijzen: $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$ dus te bewijzen: $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \frac{\frac{1}{2}\sin t}{1-\cos t}$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

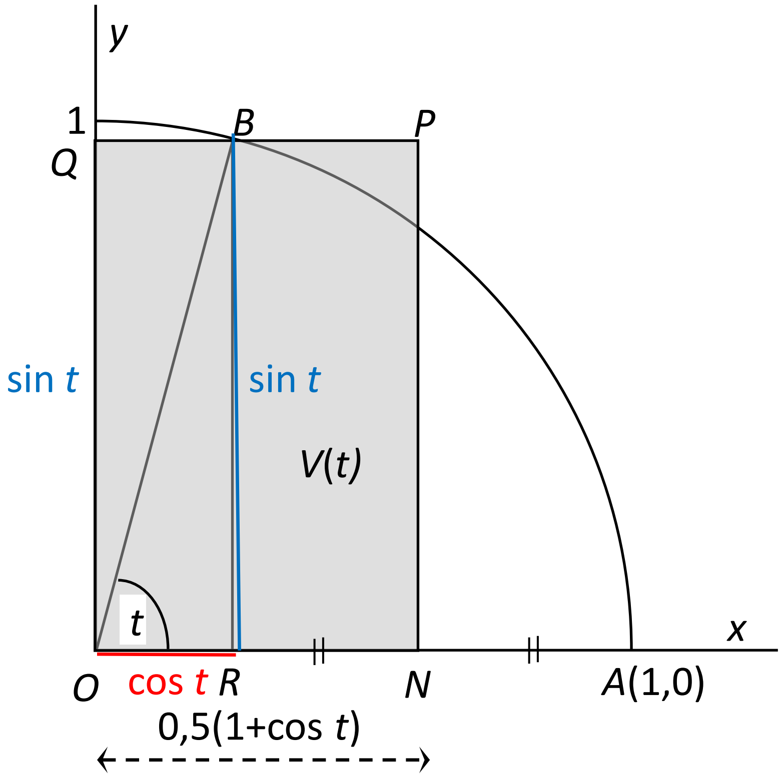


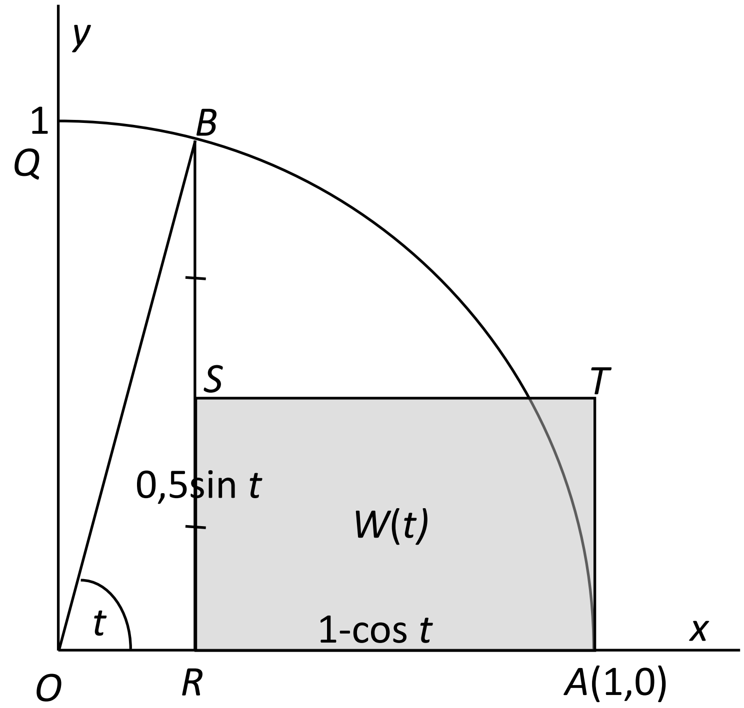


Vraag 16. Te bewijzen: $\dfrac{ON}{OQ} = \dfrac{RS}{RA}$ dus te bewijzen: $\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin t}{1-\cos t}$

$$(1+\cos t)(1-\cos t) = \sin^2 t$$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)



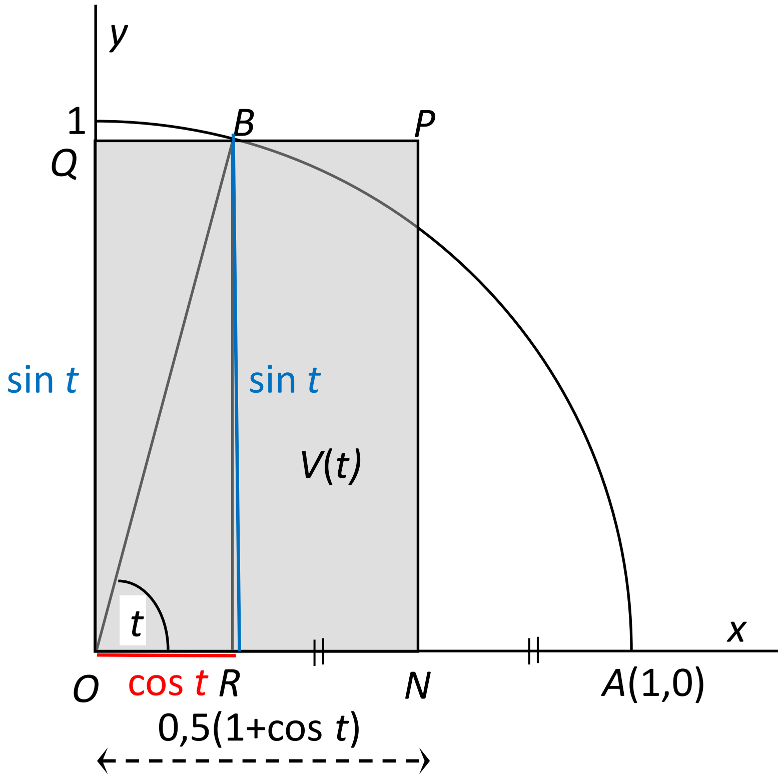


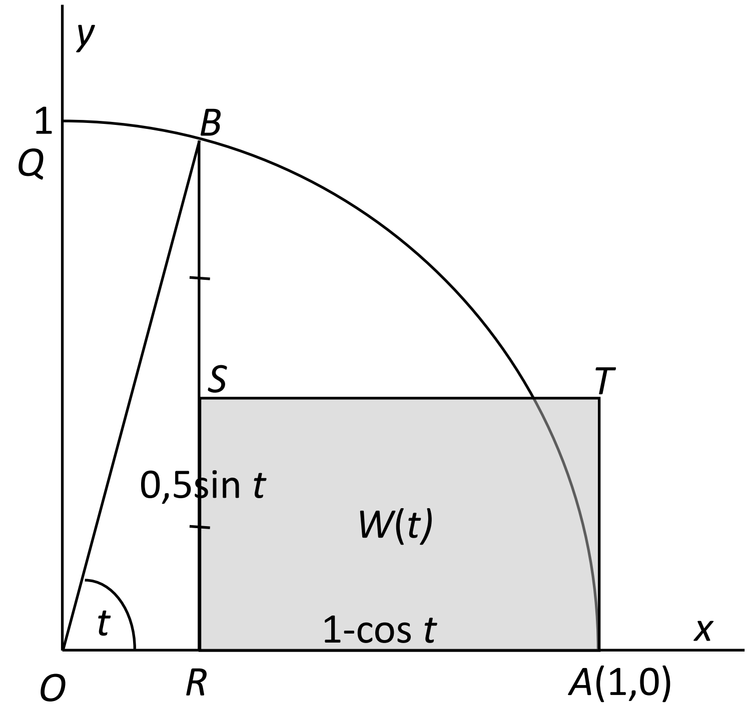
Vraag 16. Te bewijzen: $\frac{ON}{OQ} = \frac{RS}{RA}$ dus te bewijzen: $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \frac{\frac{1}{2}\sin t}{1-\cos t}$

$$(1+\cos t)(1-\cos t) = \sin^2 t \quad \Leftrightarrow \quad 1-\cos^2 t = \sin^2 t$$

En hier staat de *stelling van Pythagoras in de eenheidscirkel*: $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)



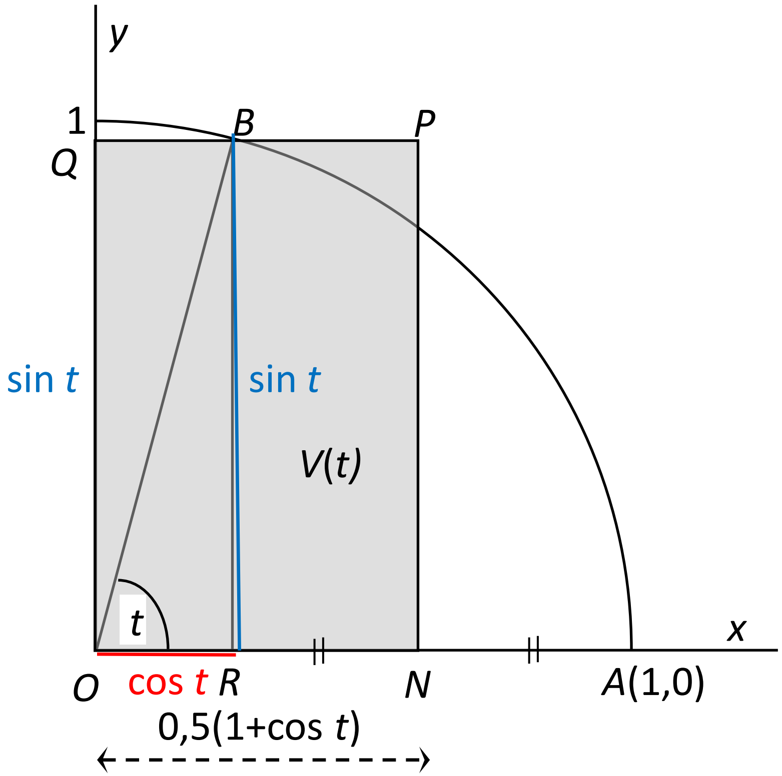


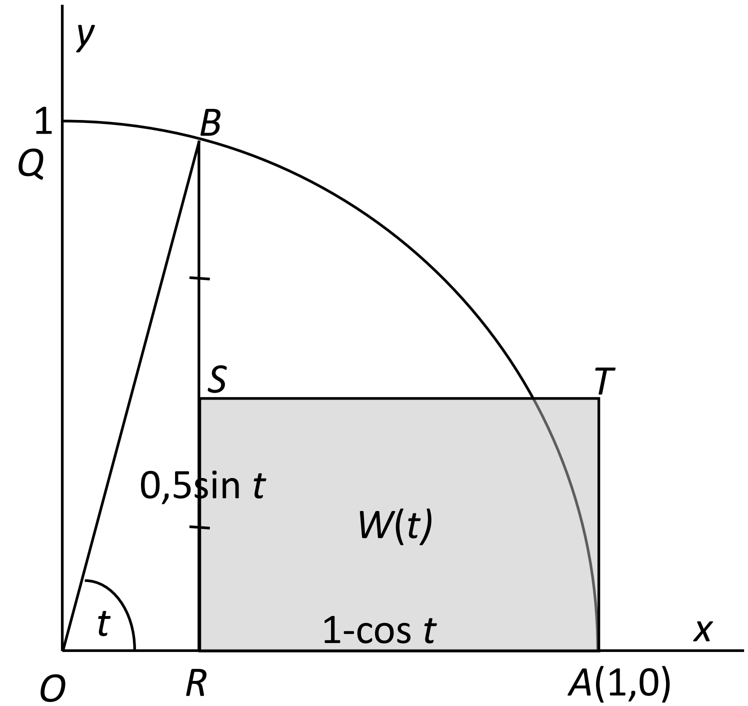
Vraag 17. Voor een bepaalde waarde van t zijn beide rechthoeken een *vierkant*.

Dan geldt: $\dfrac{ON}{OQ} = \dfrac{RA}{RS}$

Bereken van beide vierkanten exact de zijde voor deze waarde van t.

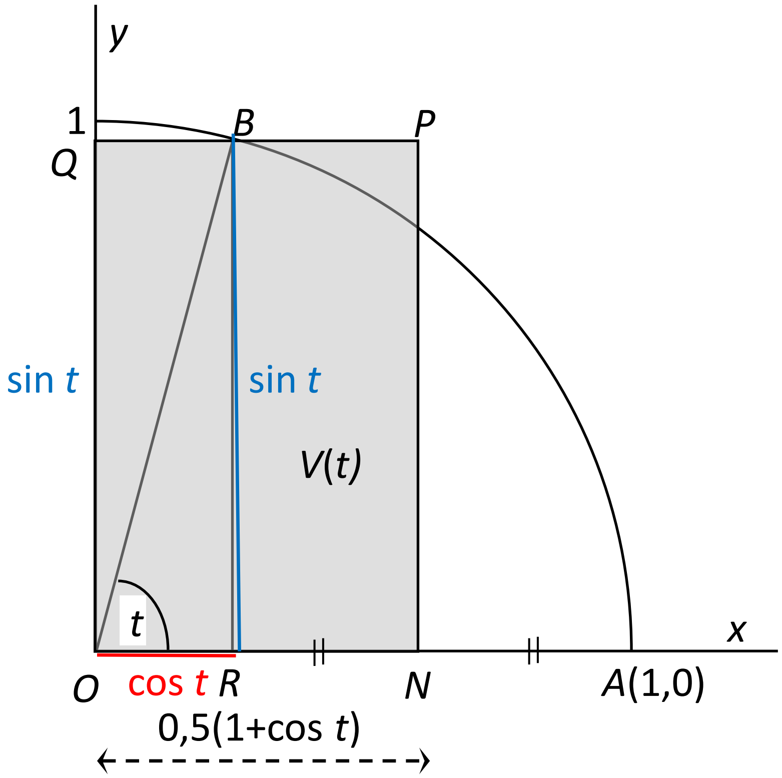
2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

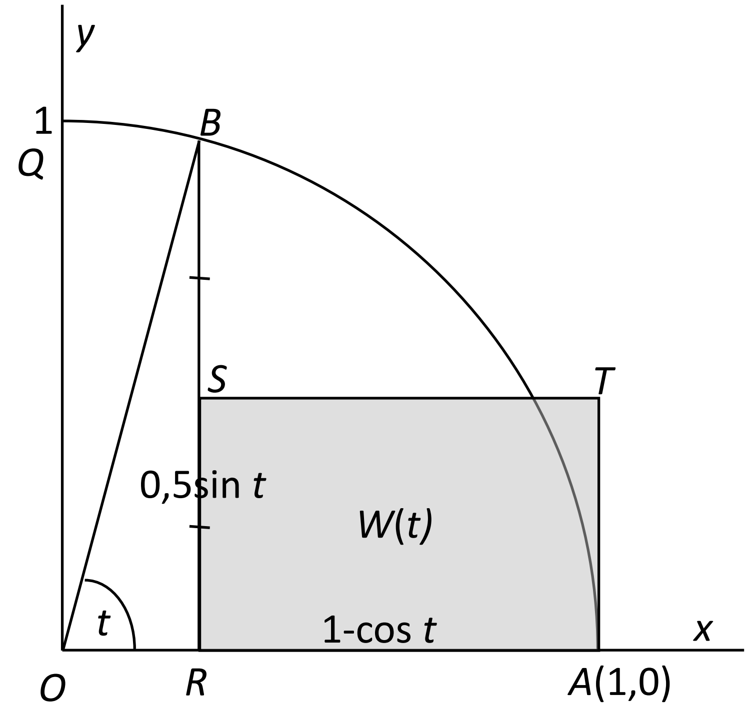




Vraag 17. $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$ dus: $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ geeft

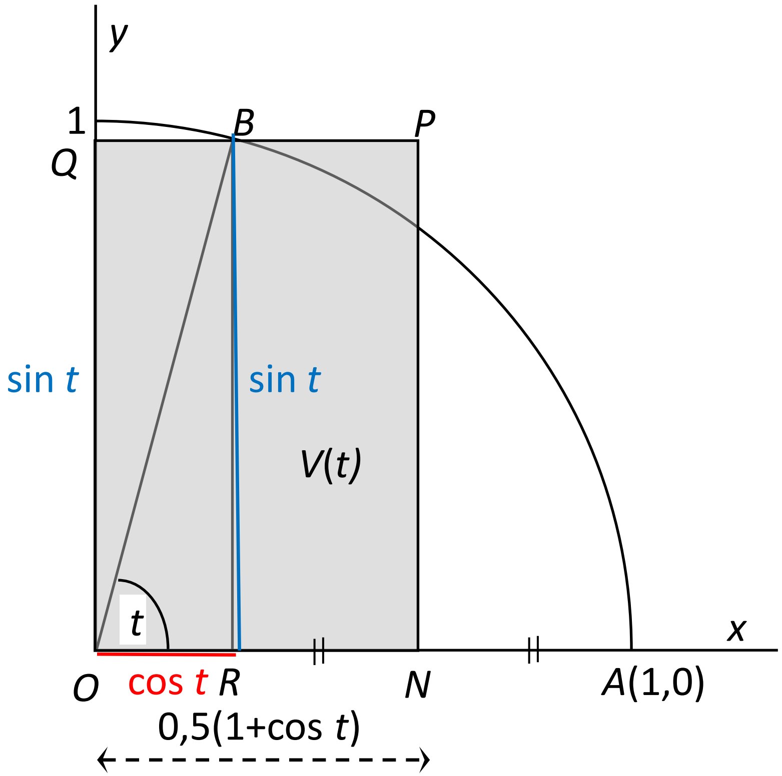
2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

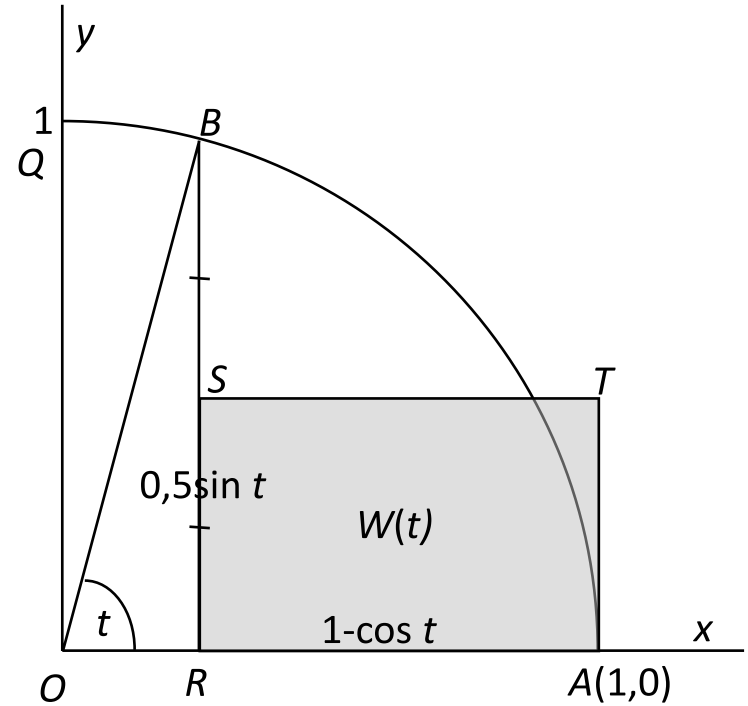




Vraag 17. $\dfrac{ON}{OQ} = \dfrac{RA}{RS}$ dus: $\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \dfrac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ geeft $1+\cos t = 4(1-\cos t)$

2010-II   Kwartcirkel (goniometrie)

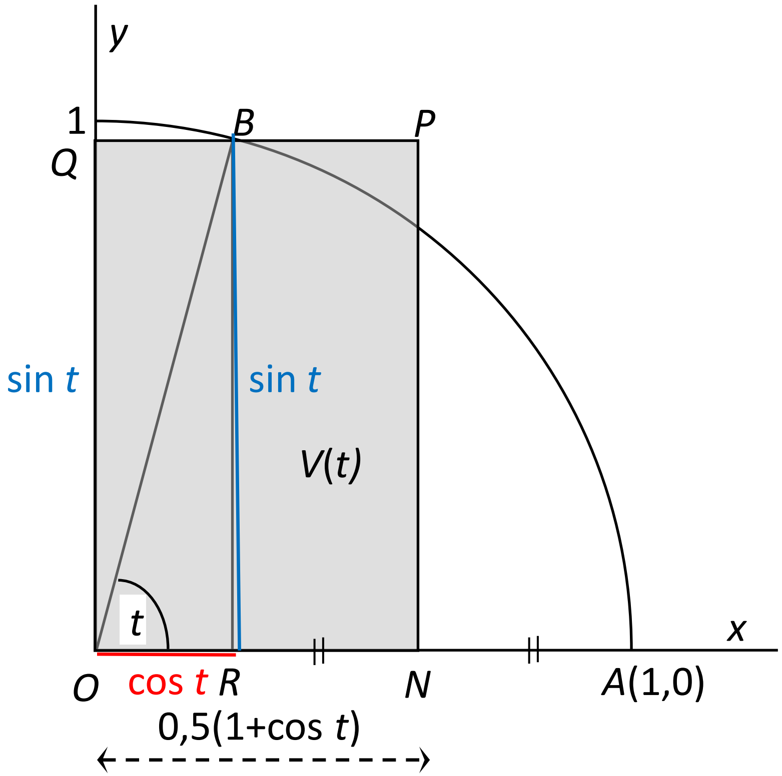


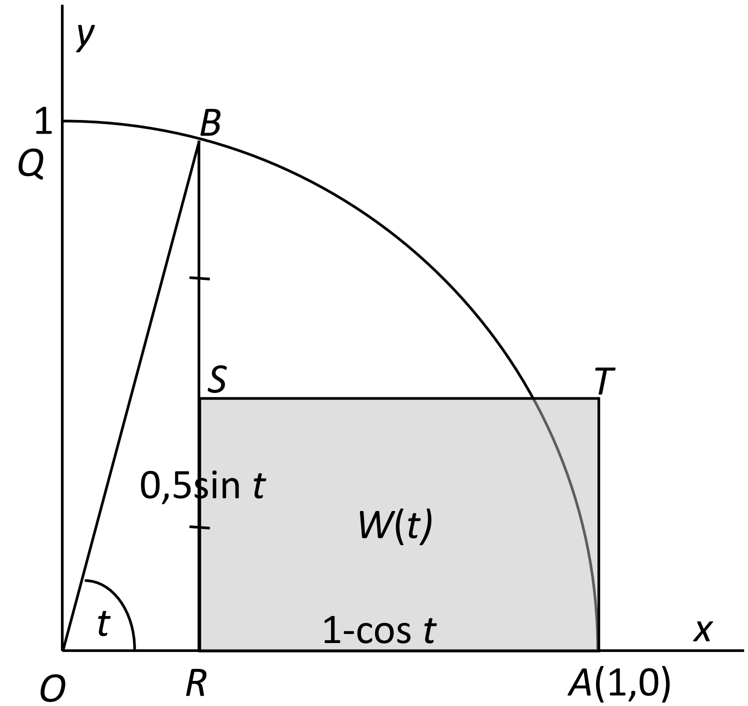


Vraag 17. $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$ dus: $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ geeft $1+\cos t = 4(1-\cos t)$

$5\cos t = 3$ dus $\cos t = \frac{3}{5}$ en $ONPQ$ heeft zijde:

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)

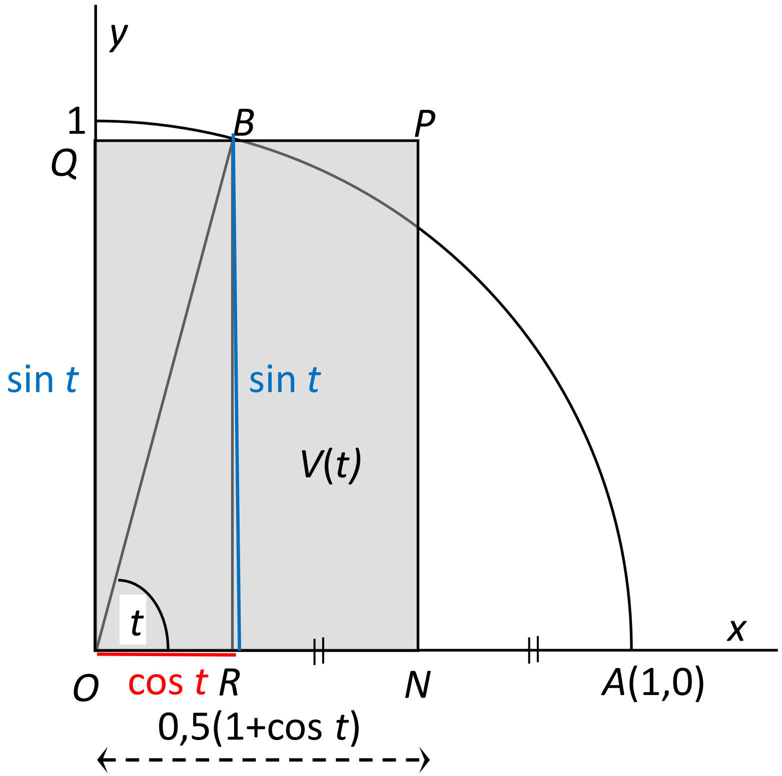


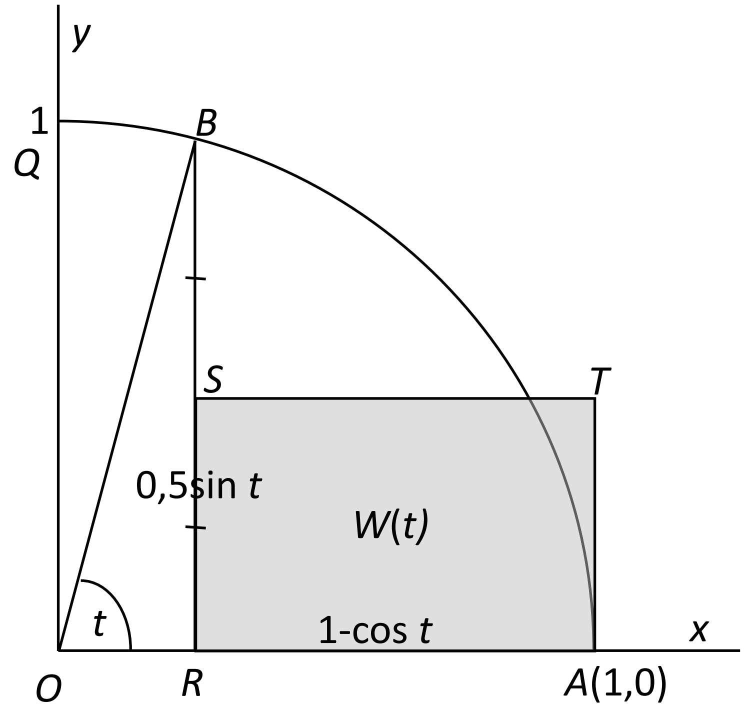


Vraag 17. $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$ dus: $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ geeft $1+\cos t = 4(1-\cos t)$

$5\cos t = 3$ dus $\cos t = \frac{3}{5}$ en $ONPQ$ heeft zijde: $\frac{1}{2}(1+\cos t) = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)



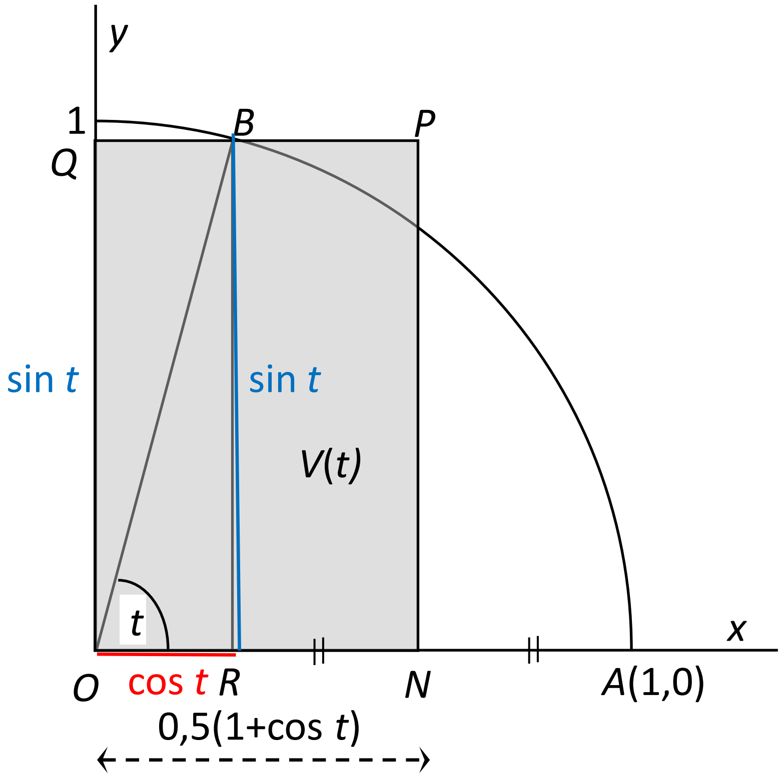


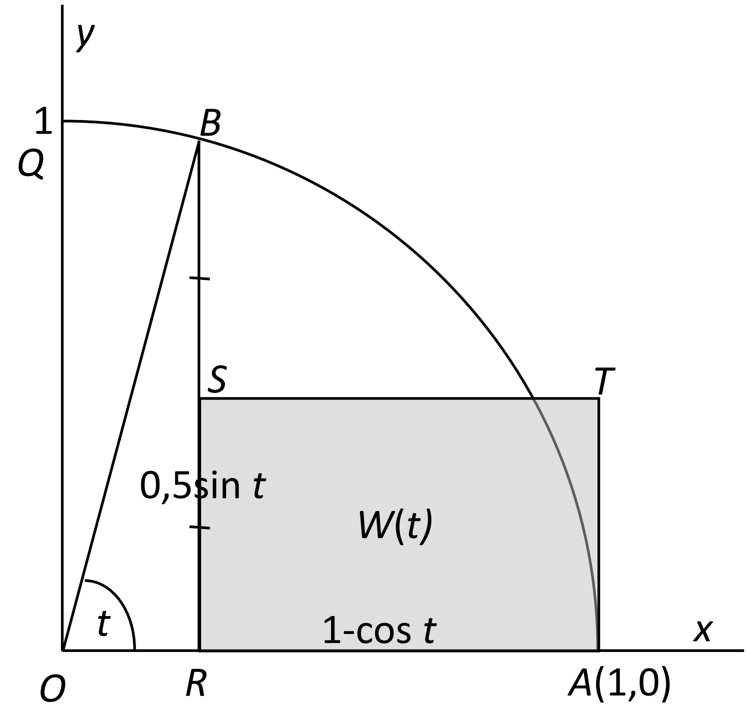
Vraag 17. $\frac{ON}{OQ} = \frac{RA}{RS}$ dus: $\frac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \frac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ geeft $1+\cos t = 4(1-\cos t)$

$5\cos t = 3$ dus $\cos t = \frac{3}{5}$ en $ONPQ$ heeft zijde: $\frac{1}{2}(1+\cos t) = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$

$ATSR$ heeft zijde:

2010-II Kwartcirkel (goniometrie)





Vraag 17. $\dfrac{ON}{OQ} = \dfrac{RA}{RS}$ dus: $\dfrac{\frac{1}{2}(1+\cos t)}{\sin t} = \dfrac{1-\cos t}{\frac{1}{2}\sin t}$ geeft $1+\cos t = 4(1-\cos t)$

$5\cos t = 3$ dus $\cos t = \frac{3}{5}$ en $ONPQ$ heeft zijde: $\frac{1}{2}(1+\cos t) = \frac{1}{2}(1+\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$

$ATSR$ heeft zijde: $1-\cos t = 1-\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$