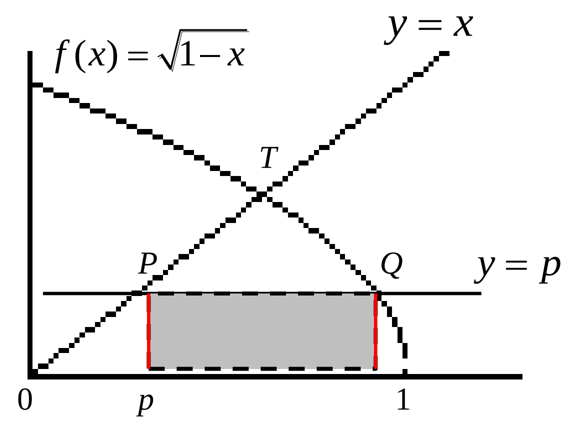
2011-I

In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt,
is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.



1. De x-coördinaat van Q is $1 - p^2$. Toon dit aan.

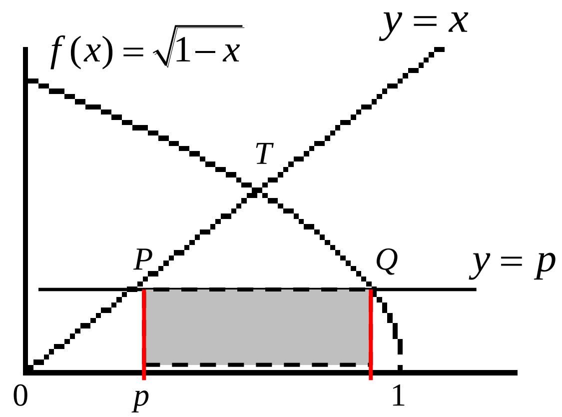
Oplossing

Q ligt op $f(x) = \sqrt{1-x}$

De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus:

2011-I

In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van *f* en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van *f* en de lijn $y = x$ snijden elkaar in *T*. Op de lijn $y = x$ ligt tussen *O*(0, 0) en *T* een punt *P*(*p*, *p*). De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van *f* in het punt *Q*. De rechthoek waarvan *PQ* een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de *x*-as ligt, is in figuur 1 voor een waarde van *p* grijs gemaakt.



1. De *x*-coördinaat van *Q* is 1- p^2 . Toon dit aan.

Oplossing

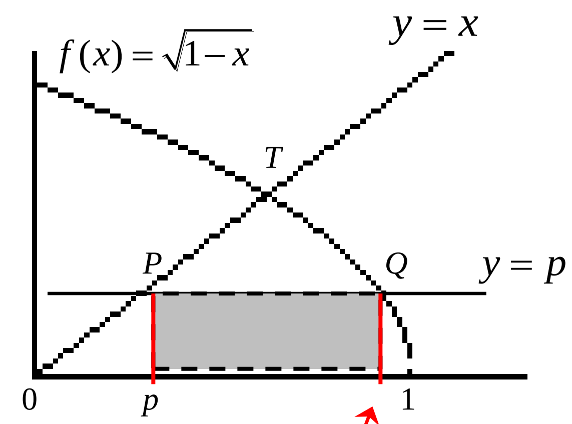
Q ligt op $f(x) = \sqrt{1-x}$

De *y*-coördinaat van *Q* is *p* (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1-x_Q} = p$

Kwadrateren geeft:

2011-I

In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt,
is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.



1. De x-coördinaat van Q is $1- p^2$. Toon dit aan.

Oplossing

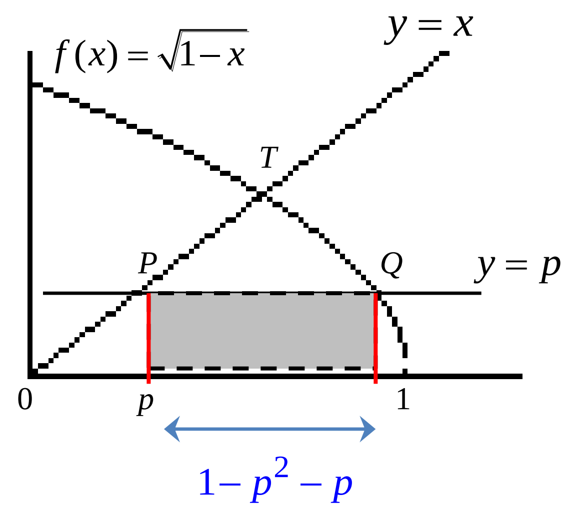
Q ligt op $\quad f(x) = \sqrt{1-x}$

De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1-x_Q} = p$

Kwadrateren geeft: $\quad 1 - x_Q = p^2 \quad$ dus $\quad x_Q = 1 - p^2$

2011-I

In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T. Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$. De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q. De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt, is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.



1. De x-coördinaat van Q is $1 - p^2$. Toon dit aan.

Oplossing

Q ligt op $f(x) = \sqrt{1-x}$

De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1 - x_Q} = p$

Kwadrateren geeft: $1 - x_Q = p^2$ dus $x_Q = 1 - p^2$

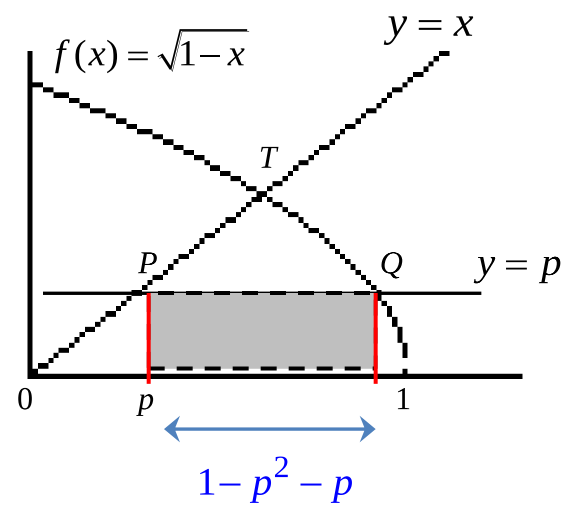
2. Voor welke waarde van p is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

Oplossing

Opp. = ***lengte*** x *hoogte* =

2011-I

In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T. Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt,
is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.



1. De x-coördinaat van Q is $1 - p^2$. Toon dit aan.

Oplossing
Q ligt op $f(x) = \sqrt{1-x}$
De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1 - x_Q} = p$

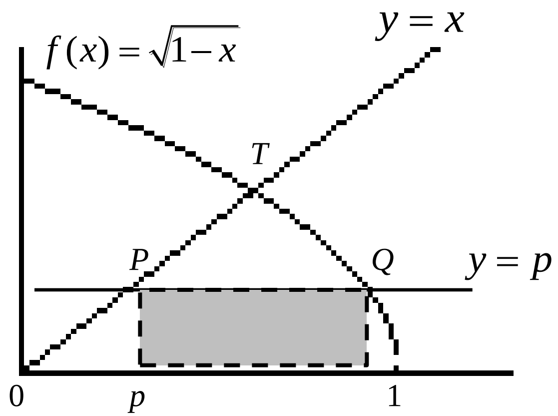
Kwadrateren geeft: $1 - x_Q = p^2$ dus $x_Q = 1 - p^2$

2. Voor welke waarde van p is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

Oplossing
Opp. = ***lengte*** x *hoogte* = $(1 - p^2 - p)p = p - p^3 - p^2$

2011-I

In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de
Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt,
is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.



1. De x-coördinaat van Q is $1 - p^2$. Toon dit aan.

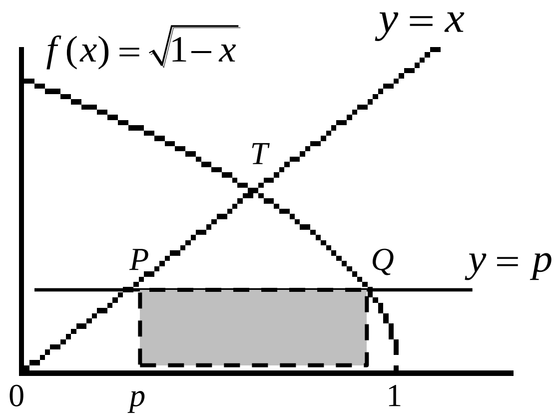
Oplossing
Q ligt op $\quad f(x) = \sqrt{1-x}$
De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1-x_Q} = p$

Kwadrateren geeft: $\quad 1 - x_Q = p^2 \quad$ dus $\quad x_Q = 1 - p^2$

2. Voor welke waarde van p is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

Oplossing
Opp. = *lengte* x *breedte* = $(1 - p^2 - p)p = p - p^3 - p^2$ differentiëren:

2011-I



In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt,
is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.

1. De x-coördinaat van Q is $1- p^2$. Toon dit aan.

Oplossing
Q ligt op $f(x)=\sqrt{1-x}$
De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1-x_Q} = p$

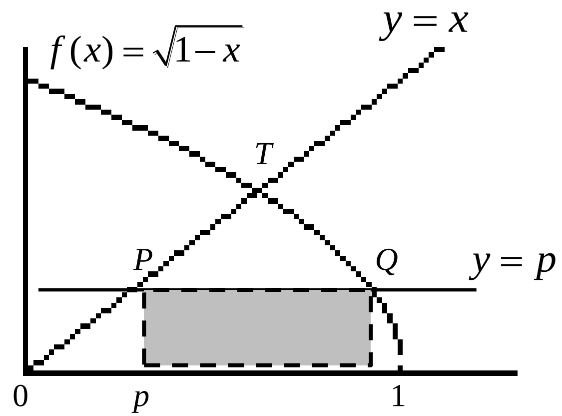
Kwadrateren geeft: $1-x_Q = p^2$ dus $x_Q = 1-p^2$

2. Voor welke waarde van p is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

Oplossing
$Opp. = lengte \times breedte = (1 - p^2 - p)p = p - p^3 - p^2$ differentiëren: $-3p^2-2p+1=0$

abc-formule:

2011-I



In figuur 1 zijn op het interval [0, 1] de grafiek van f en de lijn $y = x$ getekend. De grafiek van f en de lijn $y = x$ snijden elkaar in T.
Op de lijn $y = x$ ligt tussen $O(0, 0)$ en T een punt $P(p, p)$.
De lijn $y = p$ snijdt de grafiek van f in het punt Q.
De rechthoek waarvan PQ een zijde is en waarvan de Tegenoverliggende zijde op de x-as ligt,
is in figuur 1 voor een waarde van p grijs gemaakt.

1. De x-coördinaat van Q is 1- p^2 . Toon dit aan.

Oplossing
Q ligt op $f(x)=\sqrt{1-x}$
De y-coördinaat van Q is p (het rode lijnstukje) dus: $\sqrt{1-x_Q}=p$

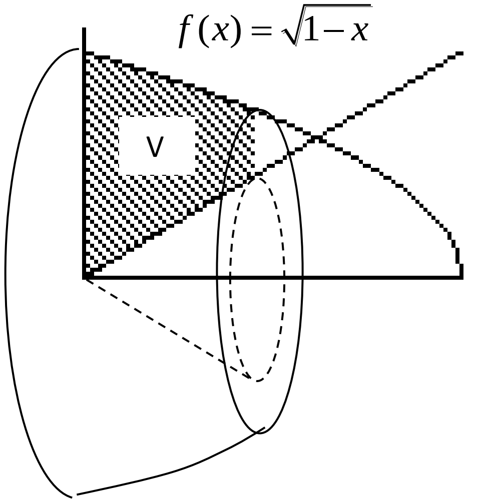
Kwadrateren geeft: $1-x_Q=p^2$ dus $x_Q=1-p^2$

2. Voor welke waarde van p is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

Oplossing
Opp. = *lengte* x *breedte* = $(1-p^2-p)p = p-p^3-p^2$ differentiëren: $-3p^2-2p+1=0$

abc-formule: $p=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{-6}=\dfrac{1}{3}$ [$p=-1$ vervalt]

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van *f*, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0{,}5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.

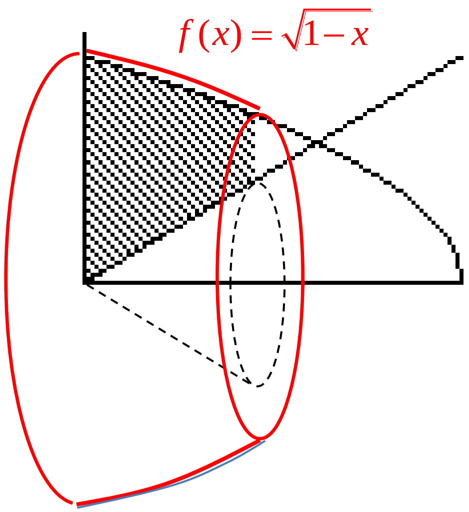


Oplossing

De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

van het gebied onder de grafiek *f* is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0,5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



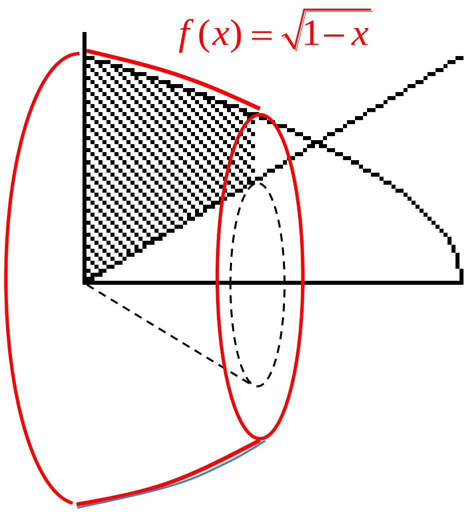
Oplossing

De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

van het gebied onder de grafiek van f is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$

De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud:

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0,5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



Oplossing

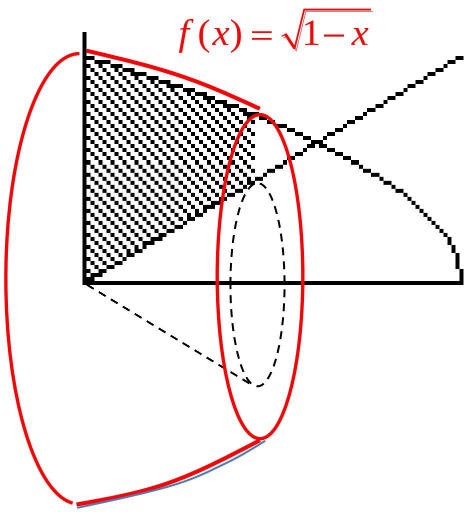
De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

van het gebied onder de grafiek van f is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$

De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x})^2 \, dx$

uitgewerkt tot

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0{,}5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



Oplossing

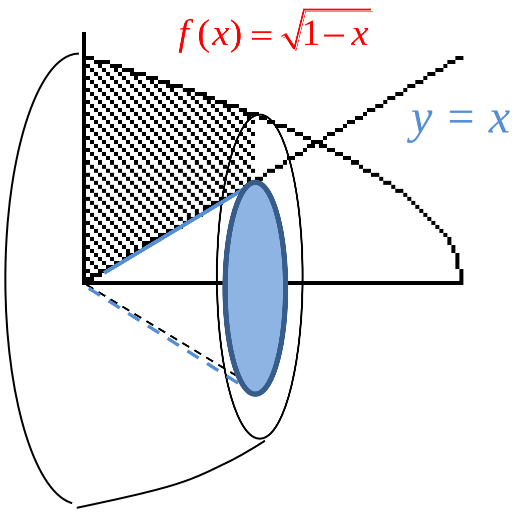
De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

van het gebied onder de grafiek van f is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x})^2\,dx$

uitgewerkt tot $\pi \cdot \int_0^{0,5} 1-x\;dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{0,5} = \frac{3}{8}\pi$

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0{,}5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



Oplossing

De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

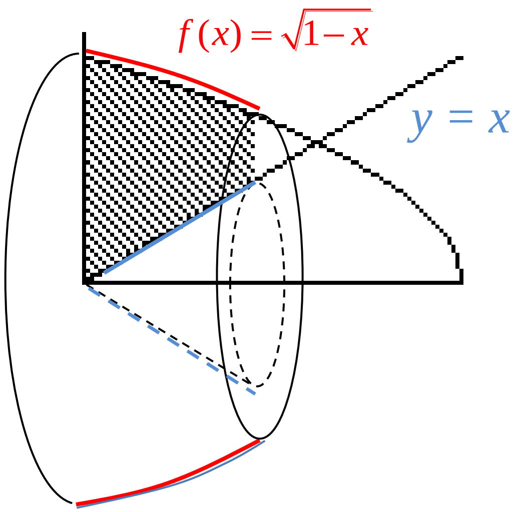
van het gebied onder de grafiek van f is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$

De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x})^2 \, dx$

uitgewerkt tot $\pi \cdot \int_0^{0,5} 1 - x \, dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{0,5} = \frac{3}{8}\pi$

De binnenste kegel (blauw) heeft inhoud:

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van *f*, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0{,}5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



Oplossing

De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

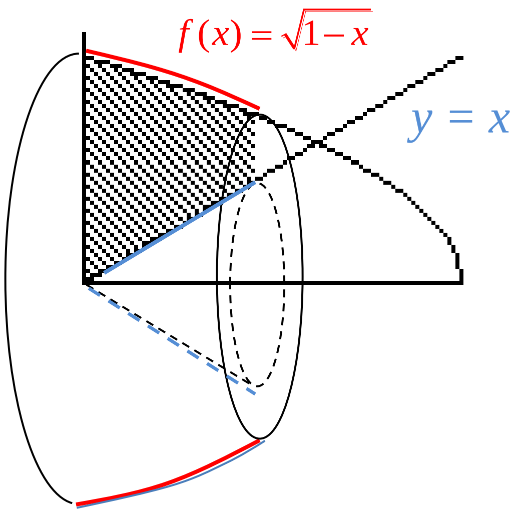
van het gebied onder de grafiek van *f* is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2\, dx$

De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x})^2\, dx$

uitgewerkt tot $\pi \cdot \int_0^{0,5} 1 - x\ dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{0,5} = \frac{3}{8}\pi$

De binnenste kegel (blauw) heeft inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} x^2\ dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{0,5} = \frac{1}{24}\pi$

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0{,}5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



Oplossing

De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

van het gebied onder de grafiek van f is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$

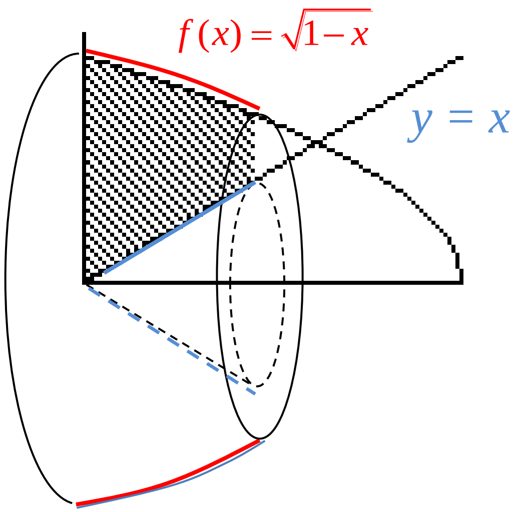
De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x})^2 \, dx$

uitgewerkt tot $\pi \cdot \int_0^{0,5} 1 - x \, dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{0,5} = \frac{3}{8}\pi$

De binnenste kegel (blauw) heeft inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} x^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{0,5} = \frac{1}{24}\pi$

De gevraagde inhoud is het verschil:

3. Het gebied V wordt begrensd door de grafiek van f, de y-as, de lijn $y = x$ en de lijn $x = 0{,}5$.
Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat als V om de x-as wordt gewenteld.



Oplossing

De formule voor de inhoud van het omwentelingslichaam

van het gebied onder de grafiek van f is: $\pi \cdot \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$

De buitenste kom (rood) heeft dus inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x})^2 \, dx$

uitgewerkt tot $\pi \cdot \int_0^{0,5} 1 - x \, dx = \pi \cdot \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^{0,5} = \frac{3}{8}\pi$

De binnenste kegel (blauw) heeft inhoud: $\pi \cdot \int_0^{0,5} x^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{0,5} = \frac{1}{24}\pi$

De gevraagde inhoud is het verschil: $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{9}{24}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{8}{24}\pi = \frac{1}{3}\pi$

Naschrift bij vraag 3

Let bij dit soort inhoudsberekeningen op de juiste volgorde:

Vóór het integreren eerst kwadrateren dan aftrekken

(en NIET eerst aftrekken en dan pas kwadrateren).

De vraag was 6 punten waard, in het correctievoorschrift stond:

Als de inhoud (foutief) berekend is met $\pi \cdot \int_0^{0,5} (\sqrt{1-x} - x)^2 \, dx$

dan voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

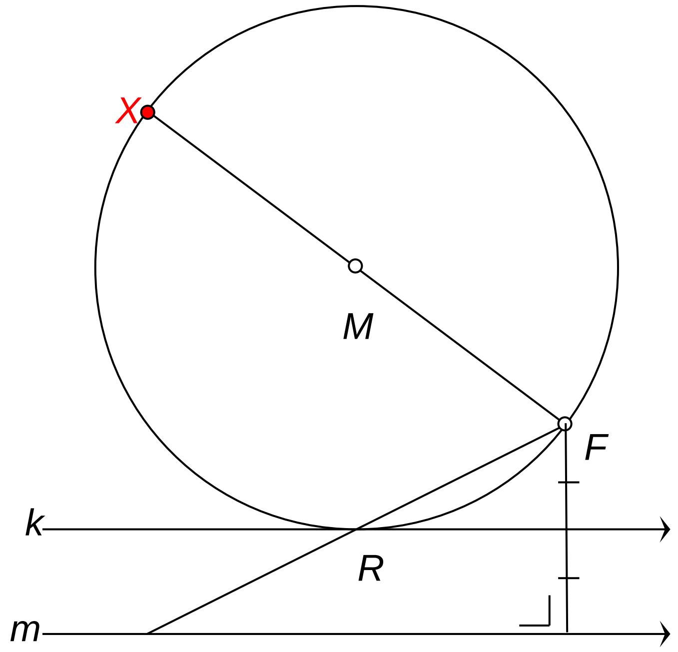
2011-I Raakcirkels

Gegeven:

- *k* // *m*
- *F* is een vast punt met de eigenschap dat
  de afstand van *F* tot *k* gelijk is aan
  de afstand van *k* tot *m*
- Cirkels met middelpunt *M* die *k* raken (in *R*)
- *FX* is een middellijn van zo'n cirkel

Te bewijzen:

De punten *X* liggen op een parabool
met brandpunt *F* en richtlijn *m*.

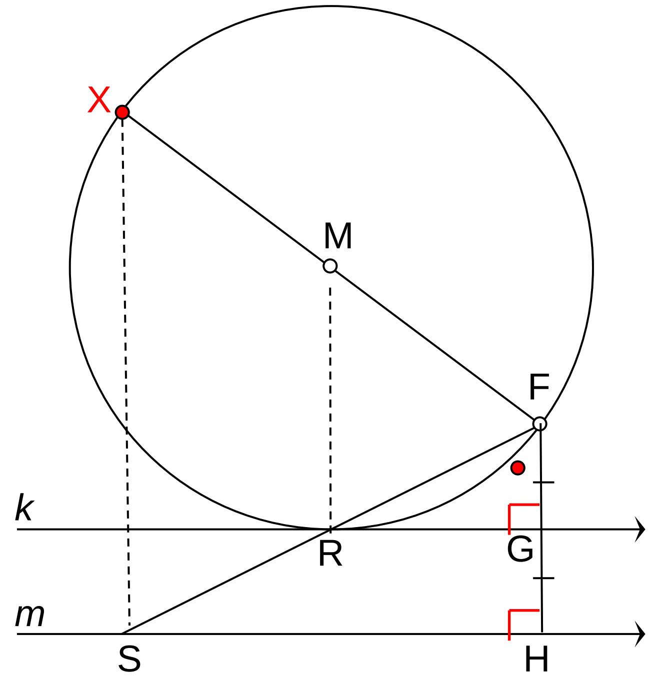


2011-I

4. Bewijs dat *FR* = *RS*.

Bewijs:

$\angle GFR = \angle HFS$ en $\angle G = \angle H$ (= 90°)
dus $\Delta FRG \sim \Delta FSH$ (*hh*) met factor 2
dus

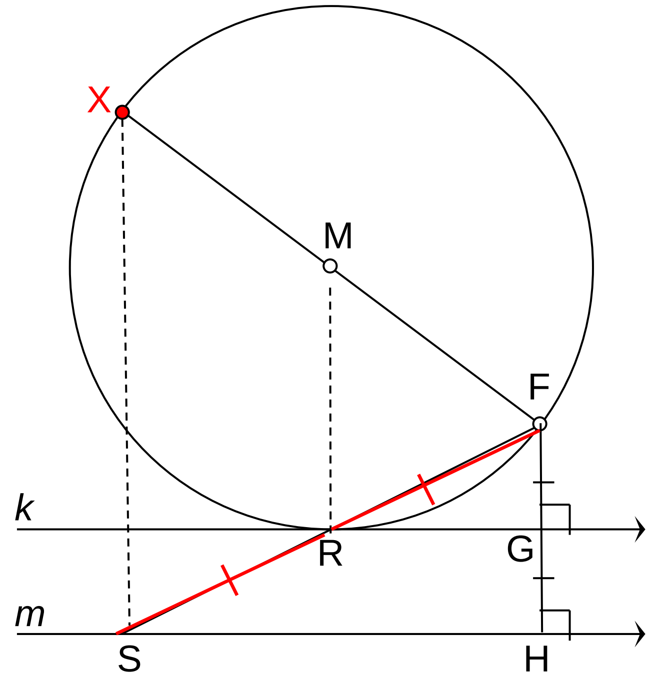


2011-I

4. Bewijs dat *FR* = *RS*.

Bewijs:

$\angle GFR = \angle HFS$ en $\angle G = \angle H$ ($= 90^o$)
dus $\Delta FRG \sim \Delta FSH$ (*hh*) met factor 2
dus $FS = 2 \cdot FR$ en $FR = RS$

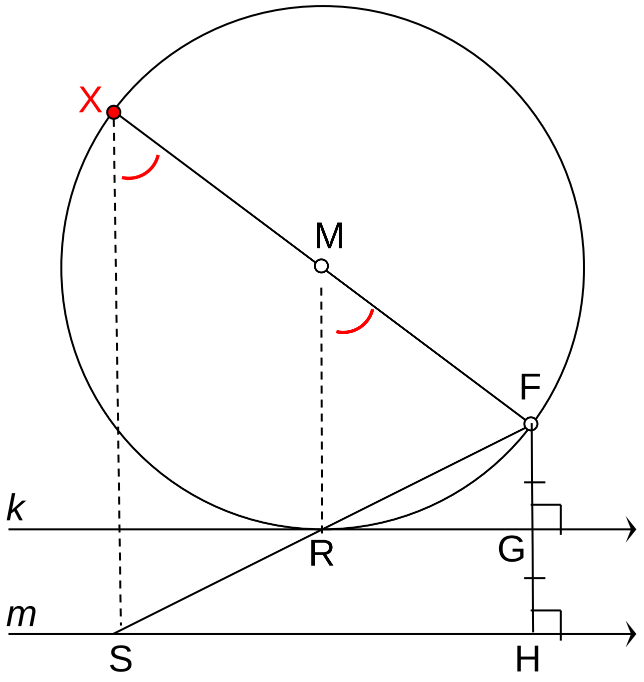


2011-I

4. Bewijs dat *FR* = *RS*.

Bewijs:

$\angle GFR = \angle HFS$ en $\angle G = \angle H$ (= 90°)
dus $\Delta FRG \sim \Delta FSH$ (*hh*) met factor 2
dus $FS = 2 \cdot FR$ en $FR = RS$



5. Bewijs dat *XS* loodrecht staat op *m*.

Bewijs:

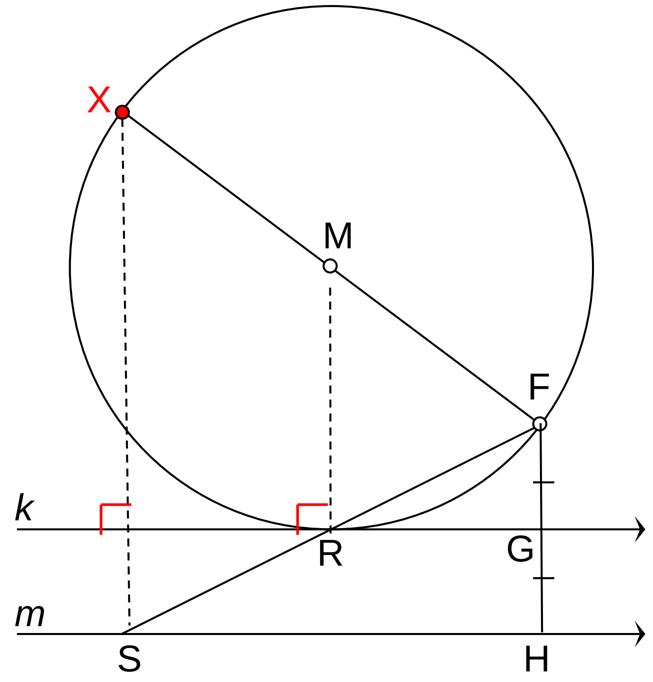
Gebruik het gegeven, dat $\Delta FXS \sim \Delta FMR$ (*zhz*).
Hieruit volgt dat $\angle FXS = \angle FMR$ dus *XS // MR* (*F-hoeken*)

2011-I

4. Bewijs dat *FR* = *RS*.

Bewijs:

$\angle GFR = \angle HFS$ en $\angle G = \angle H$ (= 90°)
dus $\Delta FRG \sim \Delta FSH$ (*hh*) met factor 2
dus $FS = 2 \cdot FR$ en $FR = RS$



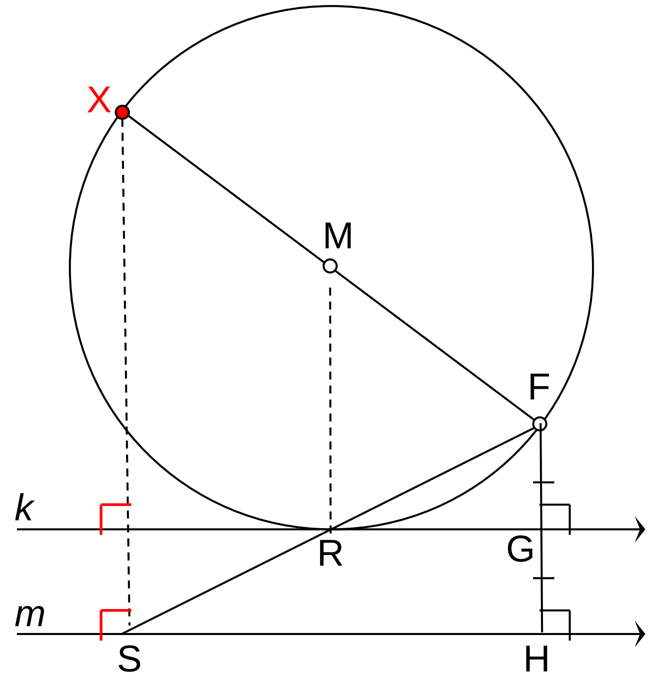
5. Bewijs dat *XS* loodrecht staat op *m*.

Bewijs:

Gebruik het gegeven, dat $\Delta FXS \sim \Delta FMR$ (*zhz*).
Hieruit volgt dat $\angle FXS = \angle FMR$ dus $XS \,//\, MR$ (*F-hoeken*)
MR staat loodrecht op *k* (*raaklijn en straal cirkel*),
dus zal ook *XS* loodrecht staan op *k* (*F-hoeken*).

2011-I

4. Bewijs dat *FR* = *RS*.



Bewijs:

$\angle GFR = \angle HFS$ en $\angle G = \angle H$ (= 90°)
dus $\Delta FRG \sim \Delta FSH$ (*hh*) met factor 2
dus $FS = 2 \cdot FR$ en $FR = RS$

5. Bewijs dat *XS* loodrecht staat op *m*.

Bewijs:

Gebruik het gegeven, dat $\Delta FXS \sim \Delta FMR$ (*zhz*).
Hieruit volgt dat $\angle FXS = \angle FMR$ dus XS // MR (*F-hoeken*)
MR staat loodrecht op *k* (*raaklijn en straal cirkel*),
dus zal ook *XS* loodrecht staan op *k* (*F-hoeken*).
Maar *k*//*m* dus staat *XS* loodrecht op *m* (*F-hoeken*).

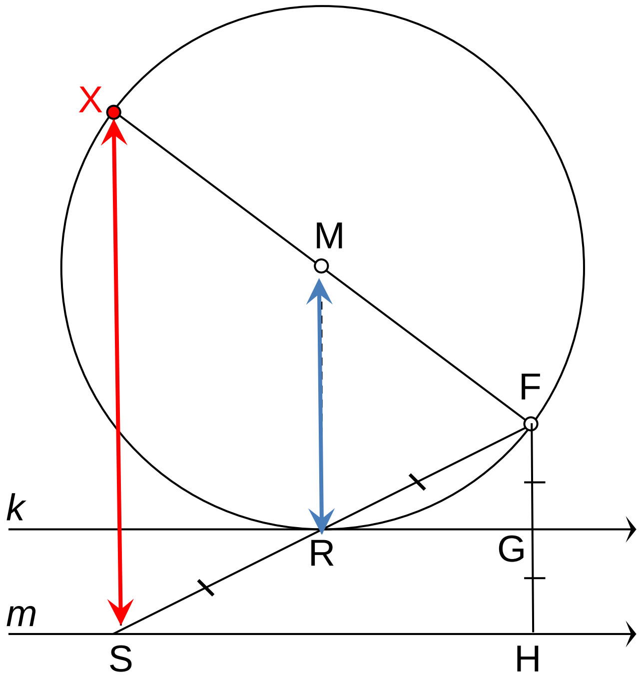
Notabene: er zijn veel andere bewijzen mogelijk.

2011-I

6. Bewijs dat *X* op parabool ligt (brandpunt *F*, richtlijn *m*).

Bewijs:

MR is *middenparallel* in $\Delta\, FXS$ (volgt uit voorafgaande)
dus $XS = 2 \cdot MR$.

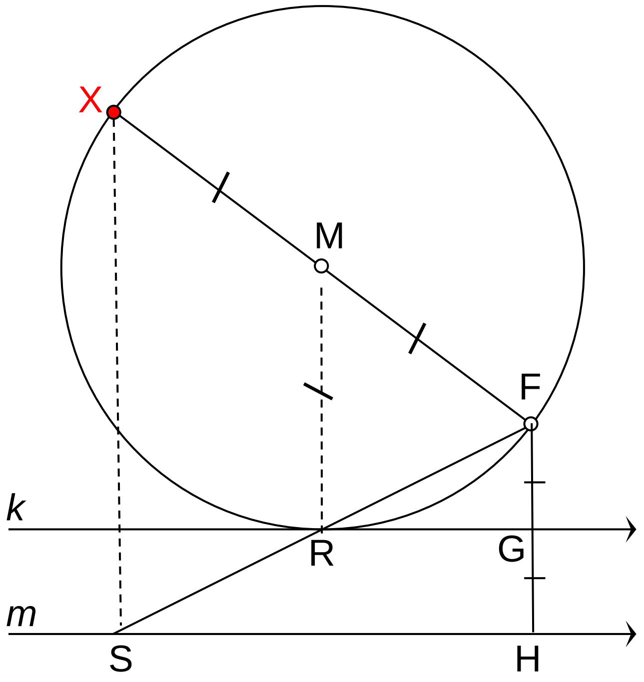


2011-I

6. Bewijs dat *X* op parabool ligt (brandpunt *F*, richtlijn *m*).

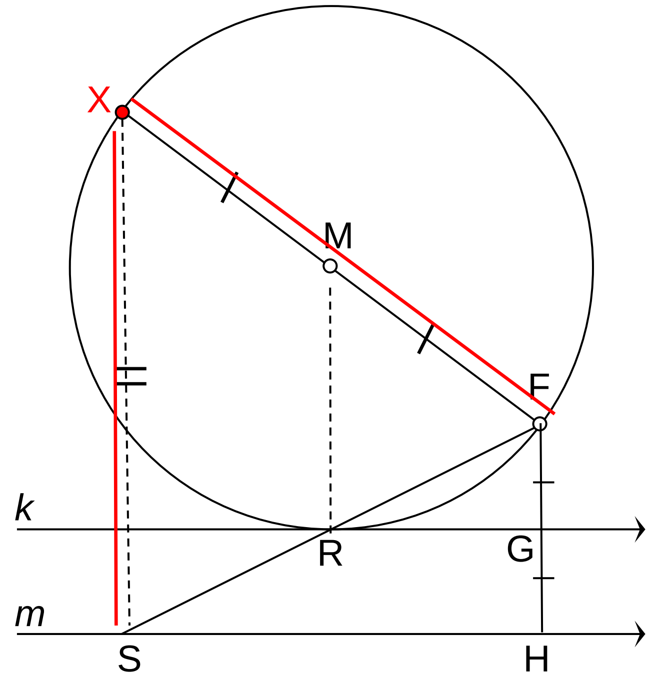
Bewijs:

MR is *middenparallel* in Δ *FXS* (volgt uit voorafgaande)
dus $XS = 2 \cdot MR$.
Maar $MR = MX = MF$ (*straal cirkel*)



2011-I

6. Bewijs dat *X* op parabool ligt (brandpunt *F*, richtlijn *m*).



Bewijs:

MR is *middenparallel* in $\Delta\, FXS$ (volgt uit voorafgaande)
dus $XS = 2 \cdot MR$.
Maar $MR = MX = MF$ (*straal cirkel*)
Dus $XS = XF$,
X heeft dus gelijke afstanden tot *F* en *m*.

Dus ligt *X* op de parabool (*definitie parabool*)

2011-I Extrusie

Profielen kunnen gemaakt worden door middel van extrusie. Bij deze techniek wordt bijvoorbeeld verwarmde kunststof door een opening geperst. De opening bepaalt de vorm van het extrusieprofiel.

De druk die nodig is om het materiaal door de opening te persen, is onder andere afhankelijk van de grootte en de vorm van de opening. De invloed van de vorm hangt af van het quotiënt $P / \sqrt{A}$.
Hierin is P de omtrek van de opening (in cm) en A de oppervlakte van de opening (in cm2).

Zo geldt voor cirkelvormige openingen: $\frac{P}{\sqrt{A}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\pi r^2}} = 2\sqrt{\pi} \approx 3,5$

In een figuur worden twee gelijkvormige openingen vergeleken. Van de grote opening zijn de breedte en de hoogte k keer zo groot als de breedte en de hoogte van de kleine opening.

Dit is een contextopgave met erg veel “ruis”. Druk op <PageDown> of <Pijltje Omlaag> om te zien welke informatie je nodig hebt.

2011-I Extrusie

Profielen kunnen gemaakt worden door middel van extrusie. Bij deze techniek wordt bijvoorbeeld verwarmde kunststof door een opening geperst. De opening bepaalt de vorm van het extrusieprofiel.

De druk die nodig is om het materiaal door de opening te persen, is onder andere afhankelijk van de grootte en de vorm van de opening. De invloed van de vorm hangt af van
het quotiënt $P / \sqrt{A}$.
Hierin is P de omtrek van de opening (in cm) en A de oppervlakte van de opening (in cm2).

Zo geldt voor cirkelvormige openingen: $\frac{P}{\sqrt{A}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\pi r^2}} = 2\sqrt{\pi} \approx 3,5$

In een figuur worden twee gelijkvormige openingen vergeleken. Van de grote opening zijn de breedte en de hoogte k keer zo groot als de breedte en de hoogte van de kleine opening.

Vraag 7. Toon aan dat het quotiënt $P / \sqrt{A}$ voor de grote opening even groot is als voor de kleine opening.

2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient

2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

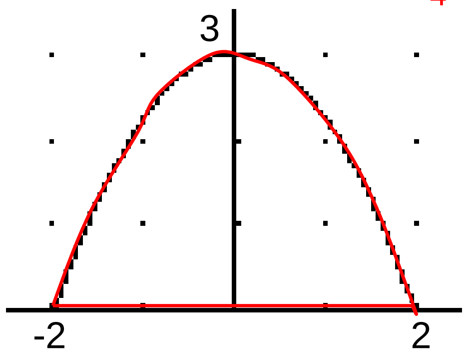
En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. Bereken de waarde van het quotiënt voor de opening hiernaast.

Gebruik de booglengteformule: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

(en je GR)

$y = 3 - \frac{3}{4}x^2$



2011-I Extrusie

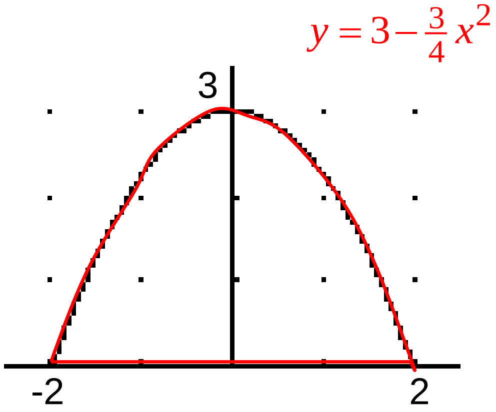
Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. De omtrek is volgens de formule van *booglengte*:



2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

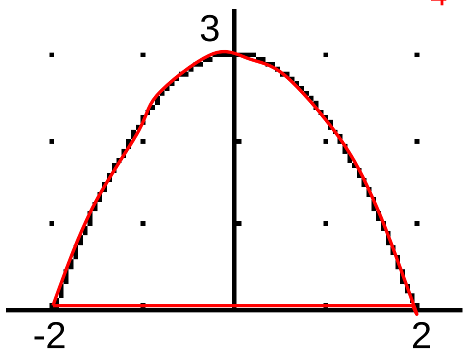
A is een *oppervlakte*; *P* is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. De omtrek is volgens de formule van *booglengte*: $P = 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

$y = 3 - \frac{3}{4}x^2$



2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

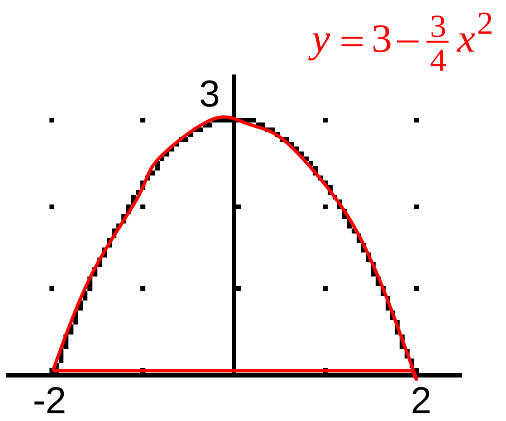
A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. De omtrek is volgens de formule van *booglengte*: $P = 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

Op de grafische rekenmachine:



2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; *P* is een *omtrek*;   het *quotiënt* $\frac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

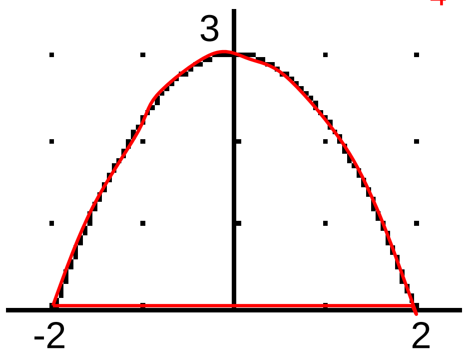
En dan is het quotient $\frac{k}{\sqrt{k^2}} = \frac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. De omtrek is volgens de formule van *booglengte*: $P = 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$

Op de grafische rekenmachine: *P* = 4 + fnInt(√(1 + 2.25X²), X, -2, 2) = 11.54

$y = 3 - \frac{3}{4}x^2$

De oppervlakte is:



2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*; het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

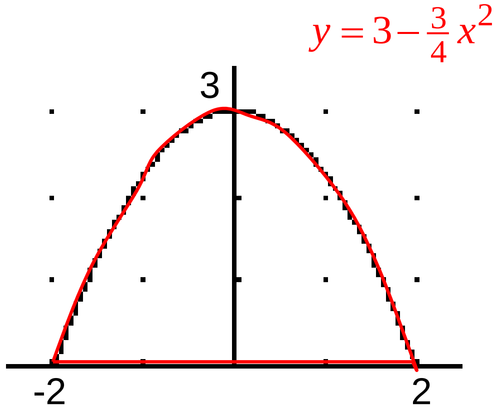
7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. De omtrek is volgens de formule van *booglengte*: $P = 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

Op de grafische rekenmachine: P = 4 + fnInt(√(1 + 2.25X²), X, -2, 2) = 11.54

De oppervlakte is: $A = \int_{-2}^{2} (3 - \frac{3}{4}x^2)\, dx = \left[3x - \frac{1}{4}x^3 \right]_{-2}^{2} = 8$



Het quotiënt is :

2011-I Extrusie

Hier staat erg veel tekst. Haal er de gegevens uit die je nodig hebt (variabelen en formules).

A is een *oppervlakte*; P is een *omtrek*;   het *quotiënt* $\dfrac{P}{\sqrt{A}}$ speelt een rol.

7. Stel de omtrek is k maal zo groot, dan is de oppervlakte k^2 maal zo groot.

En dan is het quotient $\dfrac{k}{\sqrt{k^2}} = \dfrac{k}{k} = 1$ dus gelijk gebleven.

8. De omtrek is volgens de formule van *booglengte*: $P = 4 + \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

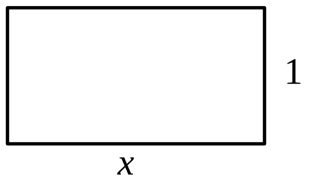
Op de grafische rekenmachine: P = 4 + fnInt(√(1 + 2.25X²), X, -2, 2) = 11.54

De oppervlakte is: $A = \int_{-2}^{2} (3 - \frac{3}{4}x^2)\, dx = \left[3x - \frac{1}{4}x^3\right]_{-2}^{2} = 8$

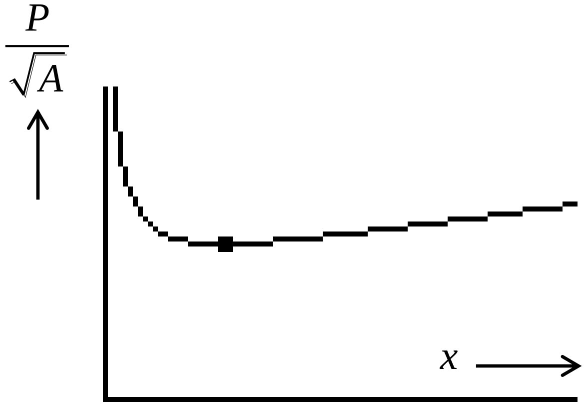
Het quotiënt is: $\dfrac{11{,}54}{\sqrt{8}} \approx 4{,}1$

2011-I Extrusie

Vraag 9. Voor verschillende rechthoekige openingen van 1 bij *x* is hieronder het quotiënt $P / \sqrt{A}$ uitgezet tegen *x*.

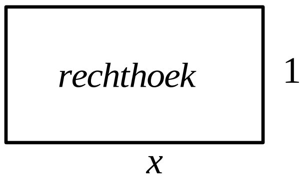


Bereken langs algebraïsche weg de *x*-coördinaat van de top.



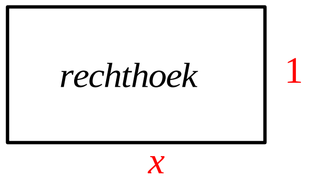
2011-I Extrusie

9. De omtrek P is   en de oppervlakte A is



2011-I Extrusie

9. De omtrek P is $2.(x + 1) = 2x + 2$ en de oppervlakte A is $x \cdot 1 = x$.



2011-I Extrusie

9. De omtrek P is $2.(x + 1) = 2x + 2$ en de oppervlakte A is $x \cdot 1 = x$.

Het quotiënt is dus : $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

Voor de x-coördinaat van de top, de afgeleide hiervan 0 stellen:

2011-I Extrusie

9. De omtrek P is $2.(x + 1) = 2x + 2$ en de oppervlakte A is $x \cdot 1 = x$.

Het quotiënt is dus : $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

Voor de x-coördinaat van de top, de afgeleide hiervan 0 stellen:

$$\frac{2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2)}{(\sqrt{x})^2} = 0$$

2011-I Extrusie

9. De omtrek P is $2.(x + 1) = 2x + 2$ en de oppervlakte A is $x \cdot 1 = x$.

Het quotiënt is dus: $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

Voor de x-coördinaat van de top, de afgeleide hiervan 0 stellen:

$$\frac{2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2)}{(\sqrt{x})^2} = 0$$

De teller hiervan is nul:

2011-I Extrusie

9. De omtrek P is $2.(x + 1) = 2x + 2$ en de oppervlakte A is $x \cdot 1 = x$.

Het quotiënt is dus : $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

De afgeleide hiervan 0 stellen: $$\frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2)}{(\sqrt{x})^2} = 0$$

De teller hiervan is nul: $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2) = 0$

2011-I Extrusie

9. De omtrek P is 2.(x + 1) = 2x + 2 en de oppervlakte A is x·1 = x.

Het quotiënt is dus : $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

De afgeleide hiervan 0 stellen: $\dfrac{2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2)}{(\sqrt{x})^2} = 0$

De teller hiervan is nul: $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2) = 0$

$\cdot 2\sqrt{x}$

Uitwerken tot:

2011-I Extrusie

9. De omtrek P is $2.(x + 1) = 2x + 2$ en de oppervlakte A is $x \cdot 1 = x$.

Het quotiënt is dus: $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

De afgeleide hiervan 0 stellen: $$\frac{2\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2)}{(\sqrt{x})^2} = 0$$

De teller hiervan is nul: $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2) = 0$

Uitwerken tot: $2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = 2x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 2x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

2011-I Extrusie

9. De omtrek P is 2.(x + 1) = 2x + 2 en de oppervlakte A is x·1 = x.

Het quotiënt is dus : $\dfrac{P}{\sqrt{A}} = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x}}$

De afgeleide hiervan 0 stellen: $\dfrac{2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2)}{(\sqrt{x})^2} = 0$

De teller hiervan is nul: $2\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+2) = 0$

Uitwerken tot: $2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = 2x+2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 2x+2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

De x-coördinaat van de top is dus 1.

2011-I De formule van Gompertz:

Voor een levensverzekering die op een leeftijd van 40 jaar afgesloten wordt, hanteerde een verzekeringsmaatschappij in de 19e eeuw de volgende formule van Gompertz om het percentage nog levende verzekerden met een bepaalde leeftijd te schatten:

$$P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$$

Hierin is $t \geq 40$ en geeft $P(t)$ aan welk percentage van de mensen die zo'n verzekering afsloten minstens t jaar oud wordt.

vraag 10. Bereken hoeveel jaar na het afsluiten van de levensverzekering volgens deze formule de helft van de polishouders is overleden.

2011-I De formule van Gompertz:

Voor een levensverzekering die op een leeftijd van 40 jaar afgesloten wordt, hanteerde een verzekeringsmaatschappij in de 19e eeuw de volgende formule van Gompertz om het percentage nog levende verzekerden met een bepaalde leeftijd t te schatten:

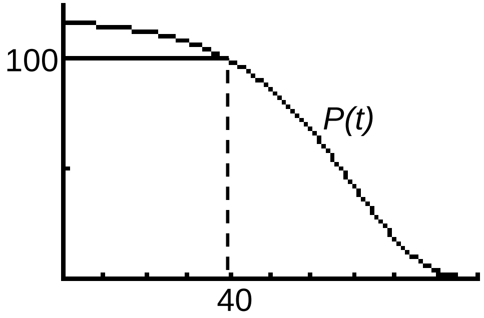
$$P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$$

Hierin is $t \geq 40$ en geeft $P(t)$ aan welk percentage van de mensen die zo'n verzekering afsloten minstens t jaar oud wordt.

vraag 10. Bereken hoeveel jaar na het afsluiten van de levensverzekering volgens deze formule de helft van de polishouders is overleden.

N.B. Dit is geen wiskunde, maar een oefening in *Begrijpend Lezen*.

Er is sprake van twee verschillende tijden:
t = de leeftijd op het moment van overlijden
u = de verlopen tijd (in jaren) na het afsluiten.
Hierbij is $t = 40 + u$ (jaar).



2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

10. P is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden:

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

10. P is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden: $119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 50$

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

10. P is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden: $119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}} = 50$

Er staat "bereken" dus de GR mag gebruikt worden bij de oplossing. Bijvoorbeeld via intersect:

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

10. *P* is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden: $119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}} = 50$

Er staat "bereken" dus de GR mag gebruikt worden bij de oplossing. Bijvoorbeeld via intersect.

Y1 = 119e^(-0.0161e^(0.0595X)) en Y2 = 50 in WINDOW $0 \leq X \leq 100$ en $0 \leq Y \leq 100$

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

10. P is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden: $119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}} = 50$

Er staat “bereken” dus de GR mag gebruikt worden bij de oplossing. Bijvoorbeeld via intersect.

Y1 = 119e^(-0.0161e^(0.0595X)) en Y2 = 50 in WINDOW $0 \le X \le 100$ en $0 \le Y \le 100$

Geeft oplossing:

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

10. *P* is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden: $119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}} = 50$

Er staat “bereken” dus de GR mag gebruikt worden bij de oplossing. Bijvoorbeeld via intersect.

Y1 = 119e^(-0.0161e^(0.0595X)) en Y2 = 50 in WINDOW $0 \le X \le 100$ en $0 \le Y \le 100$

Geeft oplossing X = 66.997 dus $t = 67$.

Conclusie:

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

10. P is een percentage, dus moet $P(t) = 50$ gesteld worden: $119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}} = 50$

Er staat "bereken" dus de GR mag gebruikt worden bij de oplossing. Bijvoorbeeld via intersect.

Y1 = 119e^(-0.0161e^(0.0595X)) en Y2 = 50 in WINDOW $0 \le X \le 100$ en $0 \le Y \le 100$

Geeft oplossing X = 66.997 dus $t = 67$.

Conclusie: 27 jaar na het afsluiten van de polis.

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

11. Bereken *m*, als $P(t)$ ook geschreven kan worden als $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m - 0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Splits de exponent: $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m} \cdot \ \ldots$

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

11. Bereken *m*, als $P(t)$ ook geschreven kan worden als $P(t) = 100 \cdot e^{m - 0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

Splits de exponent: $P(t) = 100 \cdot e^{m} \cdot e^{-0{,}0161 \cdot e^{0{,}0595t}}$

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

11. Bereken *m*, als $P(t)$ ook geschreven kan worden als $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m - 0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Splits de exponent: $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Waaruit blijkt, dat:

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

11. Bereken *m*, als $P(t)$ ook geschreven kan worden als $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m - 0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Splits de exponent: $P(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{m} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Waaruit blijkt, dat: $100 \cdot \mathrm{e}^{m} = 119$

Dus : $m = \ldots$

2011-I De formule van Gompertz: $P(t) = 119 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

11. Bereken *m*, als *P*(*t*) ook geschreven kan worden als $P(t)=100 \cdot \mathrm{e}^{m-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Splits de exponent: $P(t)=100 \cdot \mathrm{e}^{m} \cdot \mathrm{e}^{-0{,}0161 \cdot \mathrm{e}^{0{,}0595t}}$

Waaruit blijkt, dat: $100 \cdot \mathrm{e}^{m} = 119$

Dus : $m = \ln 1{,}19 \approx 0{,}17$

2011-I 12. De algemene formule van Gompertz: $P(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}$

12. Er geldt: $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$

Druk c uit in b en k.

2011-I 12. De algemene formule van Gompertz: $P(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}$

12. Er geldt: $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$ met $P'(t) = \cdots$

2011-I De algemene formule van Gompertz: $P(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}$

12. Er geldt: $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$ met $P'(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot -b\mathrm{e}^{kt} \cdot k = -abk \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot \mathrm{e}^{kt}$

twee keer kettingregel

2011-I De algemene formule van Gompertz: $P(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}$

12. Er geldt: $\frac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$ met $P'(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot -b\mathrm{e}^{kt} \cdot k = -abk \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot \mathrm{e}^{kt}$

dus $\frac{P'(t)}{P(t)} =$

2011-I De algemene formule van Gompertz: $P(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}$

12. Er geldt: $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot \mathrm{e}^{kt}$ met $P'(t) = a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot -b\mathrm{e}^{kt} \cdot k = -abk \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot \mathrm{e}^{kt}$

dus $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \dfrac{-abk \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}} \cdot \mathrm{e}^{kt}}{a \cdot \mathrm{e}^{-b \cdot \mathrm{e}^{kt}}} =$

2011-I De algemene formule van Gompertz: $P(t)=a\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot \mathrm{e}^{kt}}$

12. Er geldt: $\dfrac{P'(t)}{P(t)}=c\cdot \mathrm{e}^{kt}$ met $P'(t)=a\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot \mathrm{e}^{kt}}\cdot -b\mathrm{e}^{kt}\cdot k=-abk\cdot \mathrm{e}^{-b\cdot \mathrm{e}^{kt}}\cdot \mathrm{e}^{kt}$

dus $\dfrac{P'(t)}{P(t)}=\dfrac{-\cancel{a}bk\cdot \cancel{\mathrm{e}^{-b\cdot \mathrm{e}^{kt}}}\cdot \mathrm{e}^{kt}}{\cancel{a}\cdot \cancel{\mathrm{e}^{-b\cdot \mathrm{e}^{kt}}}}=-bk\cdot \mathrm{e}^{kt}$

waaruit volgt, dat:

2011-I De algemene formule van Gompertz: $P(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}$

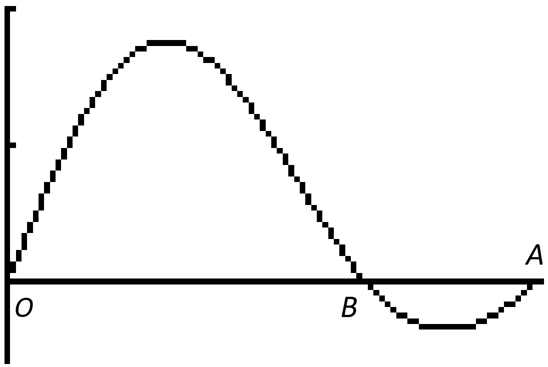
12. Er geldt: $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = c \cdot e^{kt}$ met $P'(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -be^{kt} \cdot k = -abk \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot e^{kt}$

dus $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \dfrac{-abk \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot e^{kt}}{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}} = -bk \cdot e^{kt}$

waaruit volgt, dat: $c = -bk$

2011-I   Goniometrie

Op $[0, \pi]$ is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in $O\ (0, 0)$ en $A\ (\pi, 0)$
ook nog in het punt B, tussen O en A.



13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

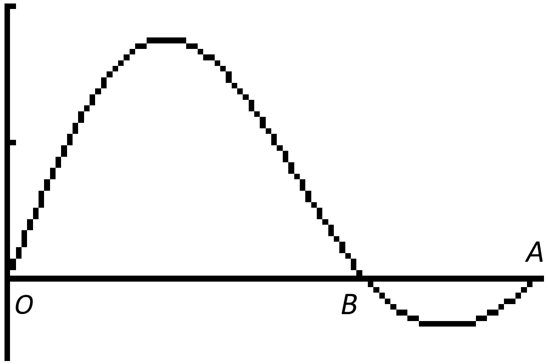
Oplossing. Twee manieren.

(1) Via de verdubbelingsformule $\sin(2\alpha) = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

(2) Of via de formule $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

2011-I Goniometrie

Op [0, π] is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A (π, 0) ook nog in het punt B, tussen O en A.



13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

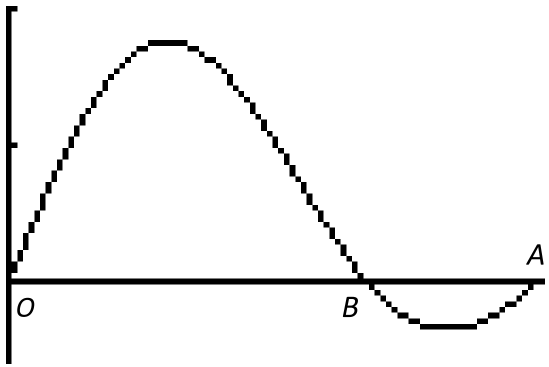
(1) Oplossing via $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$$\sin x + \sin(2x) = 1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$

Haal sin x buiten haakjes:

2011-I Goniometrie

Op $[0, \pi]$ is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A $(\pi, 0)$ ook nog in het punt B, tussen O en A.



13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

(1) Oplossing via $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

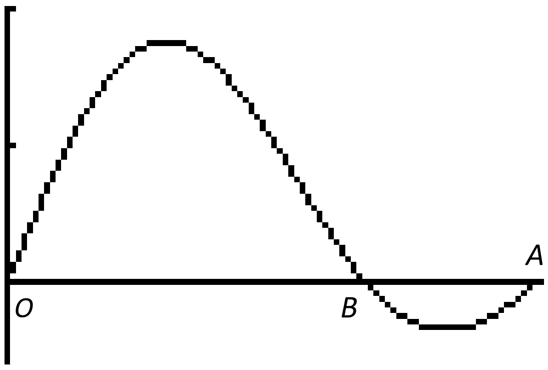
$$\sin x + \sin(2x) = 1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$

Haal sin x buiten haakjes: $\sin x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0$ geeft:

$\cos x = -\frac{1}{2}$ geeft:

2011-I Goniometrie



Op [0, π] is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A (π, 0) ook nog in het punt B, tussen O en A.

13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

(1) Oplossing via sin (2α) = 2 sin α cos α

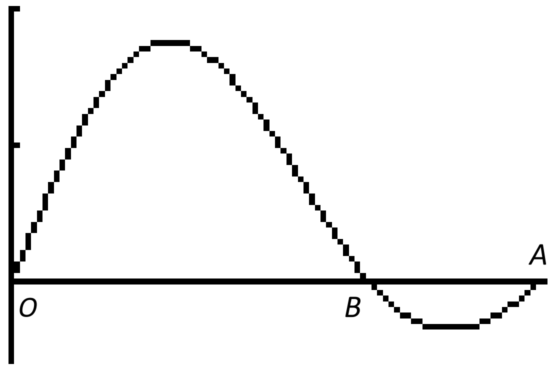
$$\sin x + \sin(2x) = 1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$

Haal sin x buiten haakjes: $\sin x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$

$\sin x = 0$ geeft $x = 0$ (punt O) en $x = \pi$ (punt A)

$\cos x = -\frac{1}{2}$ geeft $x = \dfrac{2}{3}\pi$ (punt B)

2011-I   Goniometrie



Op $[0, \pi]$ is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A (π, 0)
ook nog in het punt B, tussen O en A.

13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

(1) Oplossing via $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$\sin x + \sin(2x) = 1 \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$$

Haal sin x buiten haakjes: $\sin x \cdot (1 + 2\cos x) = 0$

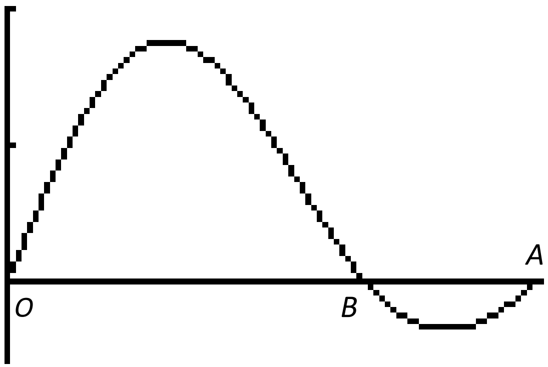
$\sin x = 0$ geeft $x = 0$ (punt O) en $x = \pi$ (punt A)

$\cos x = -\frac{1}{2}$ geeft $x = \frac{2}{3}\pi$

[Zet de GR op DEGREES en doe $\cos^{-1}(-0.5)$ dat geeft 120^o]

2011-I Goniometrie

Op $[0, \pi]$ is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A (π, 0) ook nog in het punt B, tussen O en A.



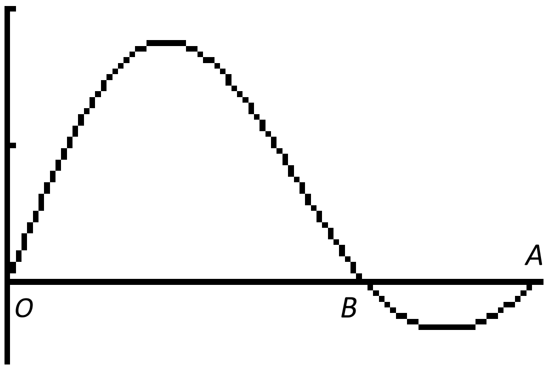
13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

(2) Oplossing via de formule $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin x = -\sin(2x)$

$\sin x = \sin(-2x)$

2011-I Goniometrie



Op [0, π] is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A (π, 0) ook nog in het punt B, tussen O en A.

13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

(2) Oplossing via de formule $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

$\sin x = -\sin(2x)$

$\sin x = \sin(-2x)$

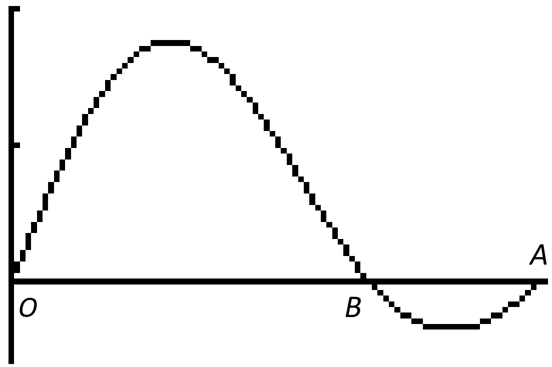
(1) $x = -2x + 2k\pi$

(2) $x = \pi - (-2x) + 2k\pi = \pi + 2x + 2k\pi$

Oplossing (2) levert de snijpunten O en A ;

Oplossing (1) levert punt B: $x = \dfrac{2}{3}\pi$

2011-I Goniometrie



Op $[0, \pi]$ is gegeven de grafiek van $f(x) = \sin x + \sin(2x)$.
De grafiek snijdt de x-as behalve in O (0, 0) en A (π, 0) ook nog in het punt B, tussen O en A.

13. Bereken de x-coördinaat x_B van B.

(2) Oplossing via de formule $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin x = -\sin(2x)$

$\sin x = \sin(-2x)$

(1) $x = -2x + 2k\pi$

(2) $x = \pi - (-2x) + 2k\pi = \pi + 2x + 2k\pi$

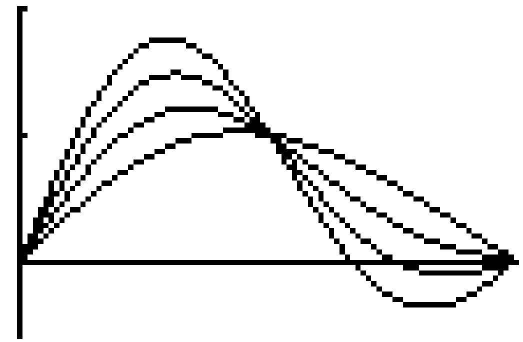
Oplossing (2) levert de snijpunten O en A ;

Oplossing (1) levert punt B: $x = \frac{2}{3}\pi$

2011-I Goniometrie

In de figuur is voor enkele waarden van *a* de grafiek getekend

van: $$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$$



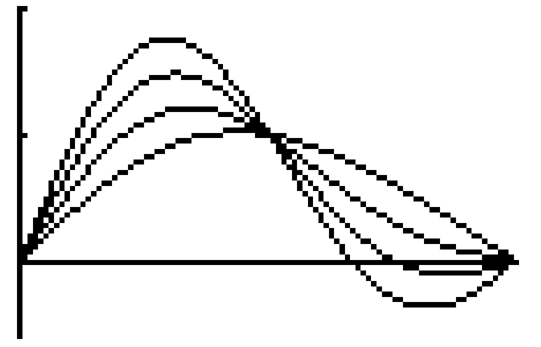
Voor een bepaalde waarde van *a* heeft de grafiek van f_a twee toppen en is van een van deze toppen: $x = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 14. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de *x*-coördinaat van de andere top.

2011-I Goniometrie

In de figuur is voor enkele waarden van *a* de grafiek getekend

van: $f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$



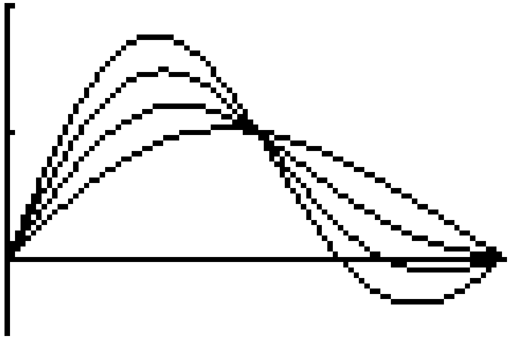
Voor een bepaalde waarde van *a* heeft de grafiek van f_a twee toppen en is van een van deze toppen: $x = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 14. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de *x*-coördinaat van de andere top.

$f'(x) =$

2011-I Goniometrie

In de figuur is voor enkele waarden van a de grafiek getekend



van: $f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$

Voor een bepaalde waarde van a heeft de grafiek van f_a twee toppen en is van een van deze toppen: $x = \frac{5}{6}\pi$

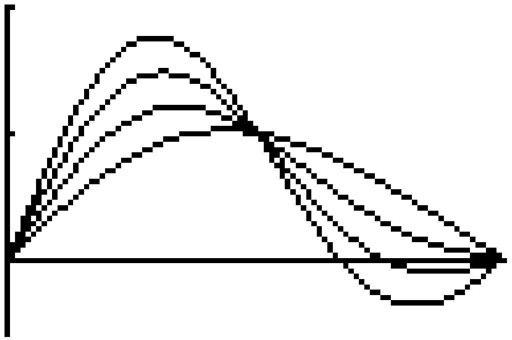
Vraag 14. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van de andere top.

$f'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x) = 0$ met :

2011-I Goniometrie

In de figuur is voor enkele waarden van *a* de grafiek getekend

van: $f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$



Voor een bepaalde waarde van *a* heeft de grafiek van f_a

twee toppen en is van een van deze toppen: $x = \frac{5}{6}\pi$

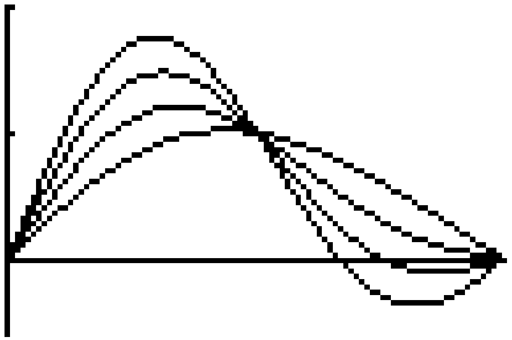
Vraag 14. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de *x*-coördinaat van de andere top.

$f'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x) = 0$ met: $x = \frac{5}{6}\pi$

Gebruik de GR en er komt:

2011-I Goniometrie

In de figuur is voor enkele waarden van *a* de grafiek getekend



van: $f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$

Voor een bepaalde waarde van *a* heeft de grafiek van f_a twee toppen en is van een van deze toppen: $x = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 14. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de *x*-coördinaat van de andere top.

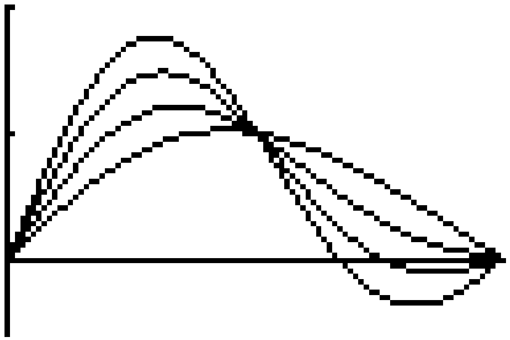
$f'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x) = 0$ met: $x = \frac{5}{6}\pi$

Gebruik de GR en er komt: -.866 + 2*a*·0.5 = 0 dus *a* = .866 (≈ 0,5√3)

2011-I Goniometrie

In de figuur is voor enkele waarden van *a* de grafiek getekend

van: $f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$



Voor een bepaalde waarde van *a* heeft de grafiek van f_a

twee toppen en is van een van deze toppen: $x = \frac{5}{6}\pi$

Vraag 14. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de *x*-coördinaat van de andere top.

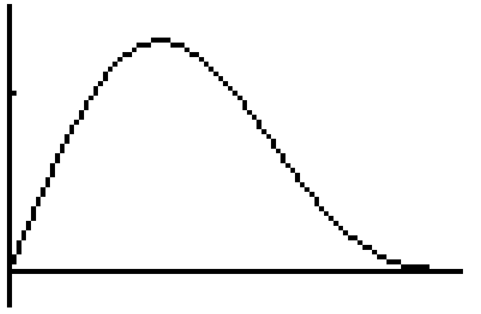
$f'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x) = 0$ met: $x = \frac{5}{6}\pi$

Gebruik de GR en er komt: -.866 + 2*a*·0.5 = 0 dus *a* = .866 (≈ 0,5√3)

Zet Y1 = sin(X) + 0.866sin(2X) op het scherm en lees af: $x_{MAX} = 0.96$

2011-I Goniometrie

$$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$$



Vraag 15. Voor elke waarde van *a* met 0 < *a* < ½ ligt de grafiek van f_a tussen (0, 0) en (π, 0) geheel boven de *x*-as. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de *x*-as, onafhankelijk is van *a*.

Oplossing: $\text{Opp} = \int_0^{\pi} f_a(x)\,dx$

2011-I   Goniometrie

$$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$$

Vraag 15. Voor elke waarde van *a* met 0 < *a* < ½ ligt de grafiek van f_a tussen (0, 0) en (π, 0) geheel boven de *x*-as. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de *x*-as, onafhankelijk is van *a*.

Oplossing: $\text{Opp} = \int_0^{\pi} f_a(x)\,dx$

$\text{Opp} = ...$

2011-I Goniometrie

$$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$$

Vraag 15. Voor elke waarde van *a* met 0 < *a* < ½ ligt de grafiek van f_a tussen (0, 0) en (π, 0) geheel boven de *x*-as. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de *x*-as, onafhankelijk is van *a*.

Oplossing: $\text{Opp} = \int_0^{\pi} f_a(x)\,dx$

$$\text{Opp} = \int_0^{\pi} \sin x + a \cdot \sin(2x)\,dx = \left[-\cos x + a \cdot -\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}$$

2011-I Goniometrie

$$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$$

Vraag 15. Voor elke waarde van a met $0 < a < ½$ ligt de grafiek van f_a tussen (0, 0) en (π, 0) geheel boven de x-as. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x-as, onafhankelijk is van a.

Oplossing: $\text{Opp} = \int_0^{\pi} f_a(x)\,dx$

$$\text{Opp} = \int_0^{\pi} \sin x + a \cdot \sin(2x)\,dx = \left[-\cos x + a \cdot -\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi - \tfrac{1}{2}a\cos(2\pi) - (-\cos 0 - \tfrac{1}{2}a\cos(0)) \longleftarrow \cos 0 = 1$$

2011-I Goniometrie

$$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$$

Vraag 15. Voor elke waarde van a met $0 < a < ½$ ligt de grafiek van f_a tussen $(0, 0)$ en $(\pi, 0)$ geheel boven de x-as. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de x-as, onafhankelijk is van a.

Oplossing: $\text{Opp} = \int_0^{\pi} f_a(x)\,dx$

$$\text{Opp} = \int_0^{\pi} \sin x + a \cdot \sin(2x)\,dx = \left[-\cos x + a \cdot -\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi - \tfrac{1}{2}a\cos(2\pi) - (-\cos 0 - \tfrac{1}{2}a\cos(0))$$

$$= -(-1) - \tfrac{1}{2}a \cdot 1 + 1 + \tfrac{1}{2}a \cdot 1$$

2011-I Goniometrie

$f_a(x) = \sin x + a \cdot \sin(2x)$

Vraag 15. Voor elke waarde van *a* met 0 < *a* < ½ ligt de grafiek van f_a tussen (0, 0) en (π, 0) geheel boven de *x*-as. Toon aan dat de oppervlakte van het vlakdeel dat wordt begrensd door de grafiek van f_a en de *x*-as, onafhankelijk is van *a*.

Oplossing: $\text{Opp} = \int_0^{\pi} f_a(x)\,dx$

$$\text{Opp} = \int_0^{\pi} \sin x + a \cdot \sin(2x)\,dx = \Big[-\cos x + a \cdot -\tfrac{1}{2}\cos(2x)\Big]_0^{\pi}$$

$$= -\cos\pi - \tfrac{1}{2}a\cos(2\pi) - (-\cos 0 - \tfrac{1}{2}a\cos(0))$$

$$= -(-1) - \tfrac{1}{2}a \cdot 1 + 1 + \tfrac{1}{2}a \cdot 1$$

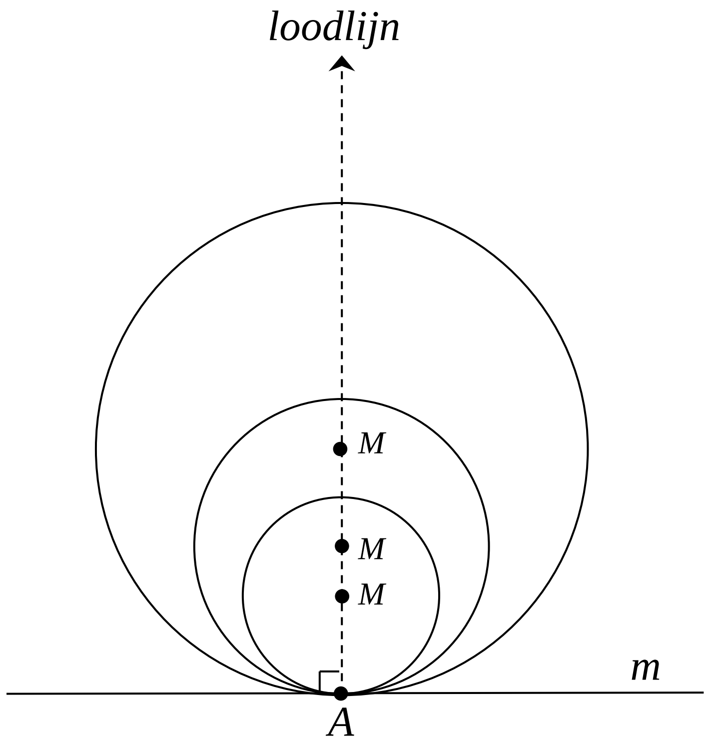
$$= 1 - \tfrac{1}{2}a + 1 + \tfrac{1}{2}a = 2 \quad \text{is onafhankelijk van a}$$

Vooraf aan 2011-I vraag 16

Raaklijn en straal (naar het raakpunt) van een cirkel staan loodrecht op elkaar.

De middelpunten *M* van de cirkels die een gegeven lijn *m* in een vast punt *A* raken,

liggen op de *loodlijn* op *m* in *A*.



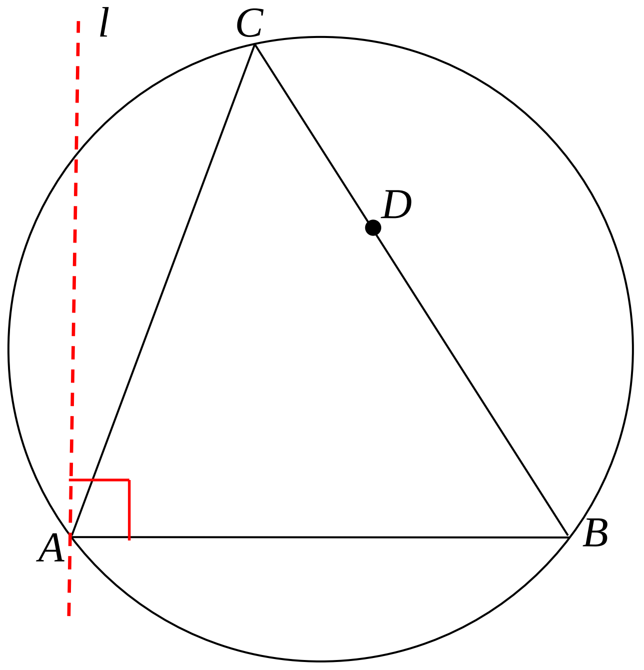
2011-I meetkunde vraag 16

Gegeven is een driehoek *ABC*, met punt *D* op zijde *BC*.

De cirkel door *D* die de lijn *AB* raakt in *A*,
snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*
behalve in *A* ook in punt *E*.

Vraag 16. Teken punt *E*. Licht je werkwijze toe.

- Teken de loodlijn (*l*) in *A* op *AB*.



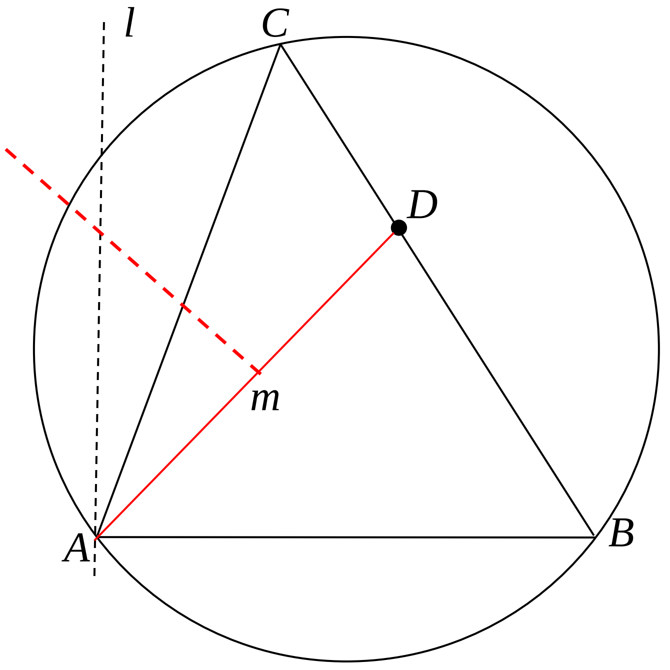
2011-I meetkunde vraag 16

Gegeven is een driehoek *ABC*, met punt *D* op zijde *BC*.

De cirkel door *D* die de lijn *AB* raakt in *A*,
snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*
behalve in *A* ook in punt *E*.

Vraag 16. Teken punt *E*. Licht je werkwijze toe.

- Teken de loodlijn (l) in *A* op *AB*.
- Teken de middelloodlijn (m) van *AD*.



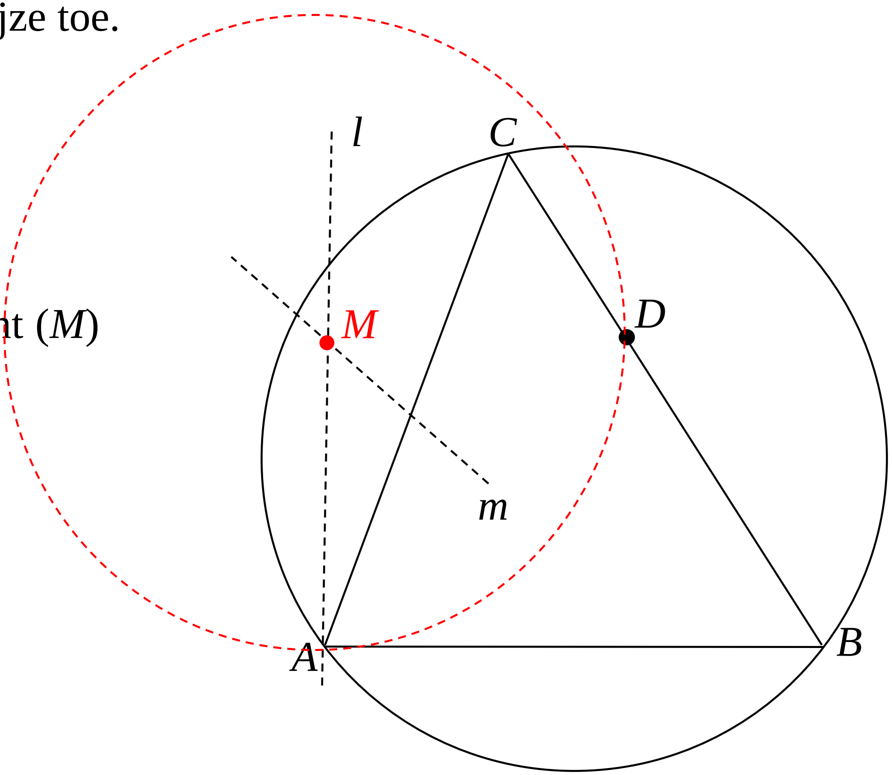
2011-I meetkunde vraag 16

Gegeven is een driehoek *ABC*, met punt *D* op zijde *BC*.

De cirkel door *D* die de lijn *AB* raakt in *A*,
snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*
behalve in *A* ook in punt *E*.

Vraag 16. Teken punt *E*. Licht je werkwijze toe.

- Teken de loodlijn (*l*) in *A* op *AB*.
- Teken de middelloodlijn (*m*) van *AD*.
- Het snijpunt van *l* en *m* is het middelpunt (*M*) van de gezochte cirkel.



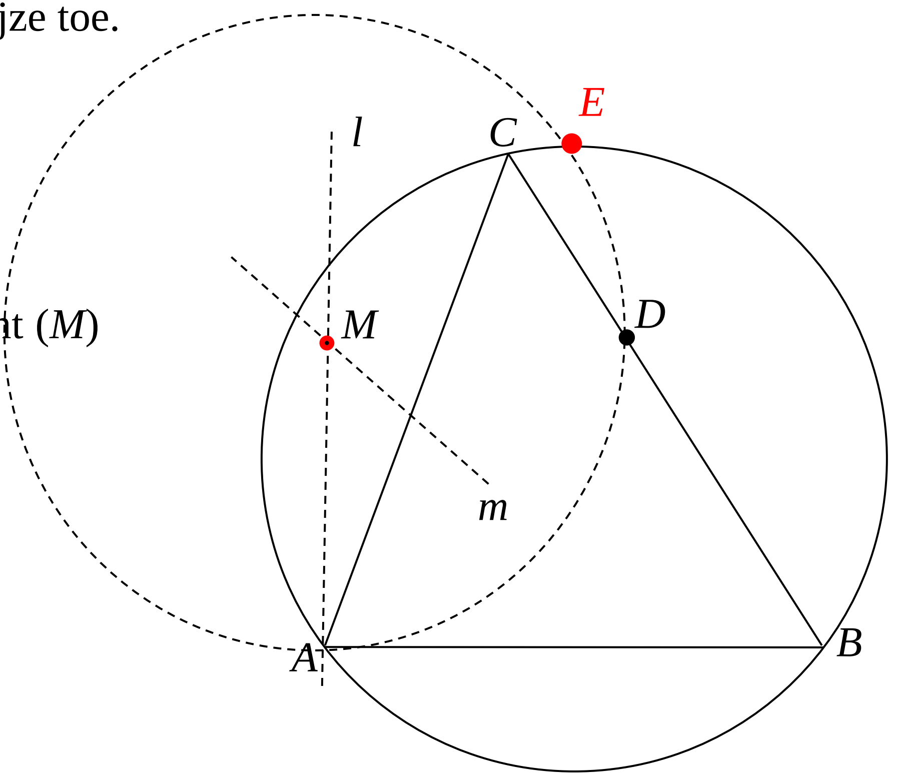
2011-I meetkunde vraag 16

Gegeven is een driehoek *ABC*, met punt *D* op zijde *BC*.

De cirkel door *D* die de lijn *AB* raakt in *A*,
snijdt de omgeschreven cirkel van driehoek *ABC*
behalve in *A* ook in punt *E*.

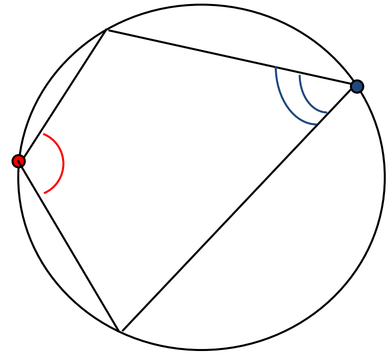
Vraag 16. Teken punt *E*. Licht je werkwijze toe.

- Teken de loodlijn (l) in *A* op *AB*.
- Teken de middelloodlijn (m) van *AD*.
- Het snijpunt van l en m is het middelpunt (M) van de gezochte cirkel.
- *E* is het snijpunt van de twee cirkels.



Opmerking bij 2011 – I   vraag 17

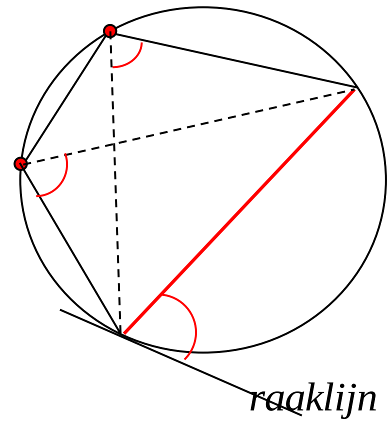
Er zijn twee koordenvierhoek stellingen:



(1) De som van overstaande hoeken is 180°

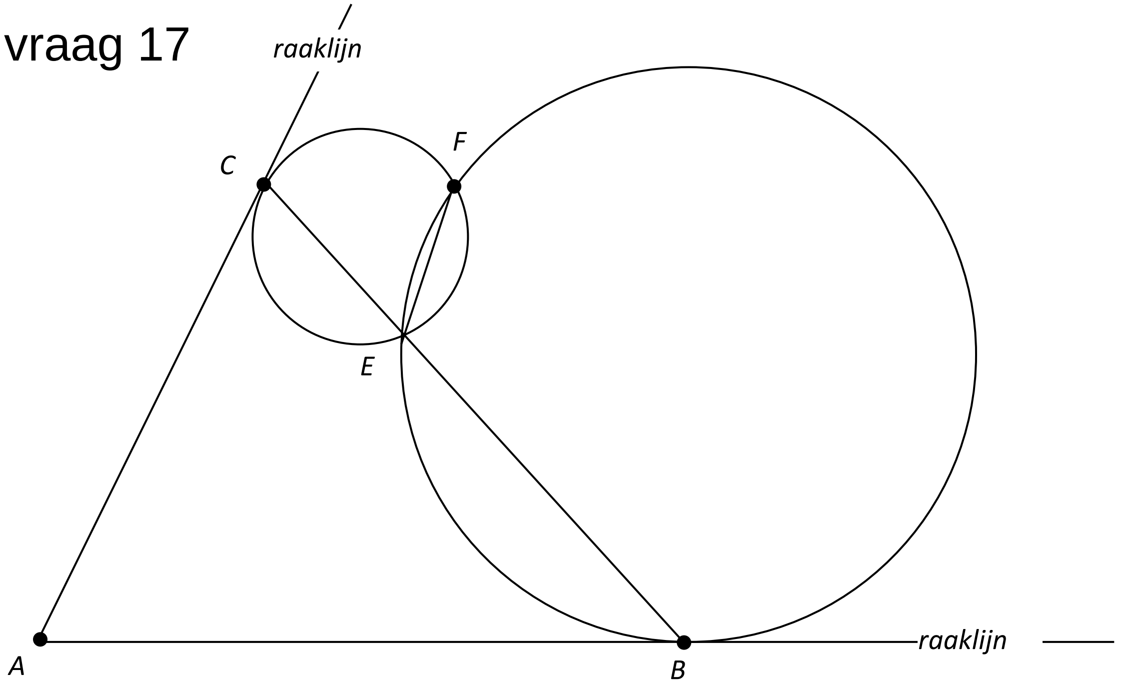
(2) Twee opvolgende hoekpunten
hebben dezelfde gezichtshoek
t.o.v. de overstaande zijde

(Denk aan de raaklijn-koorde stelling)



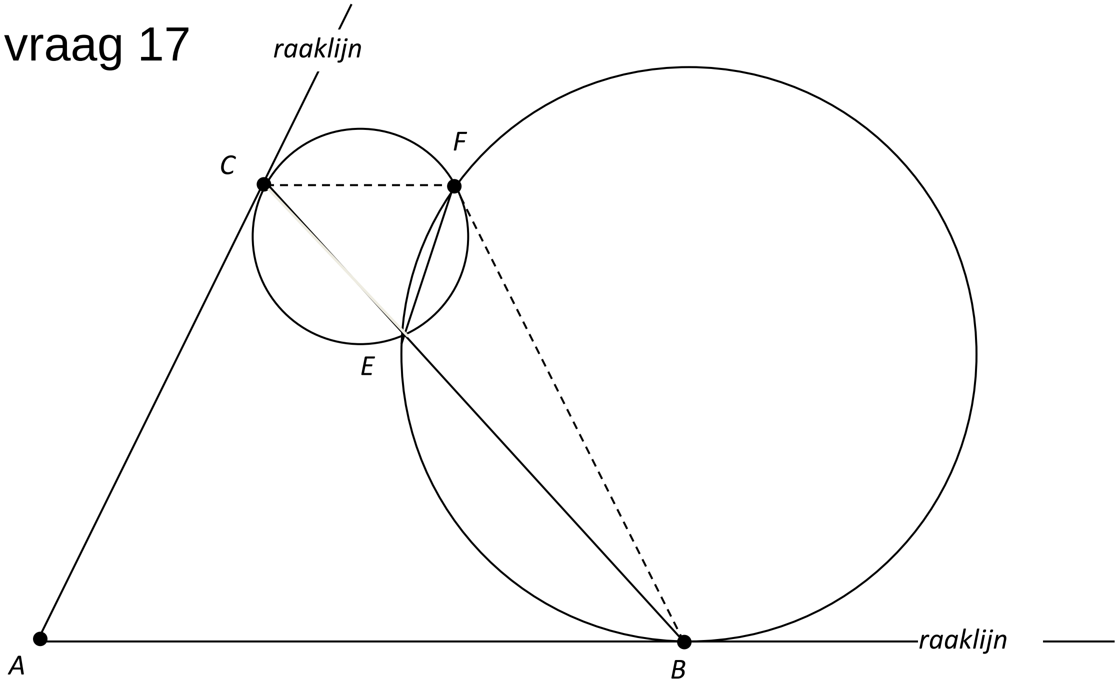
We gebruiken in deze som stelling (1) (een kwestie van intuïtie)

2011 – I vraag 17



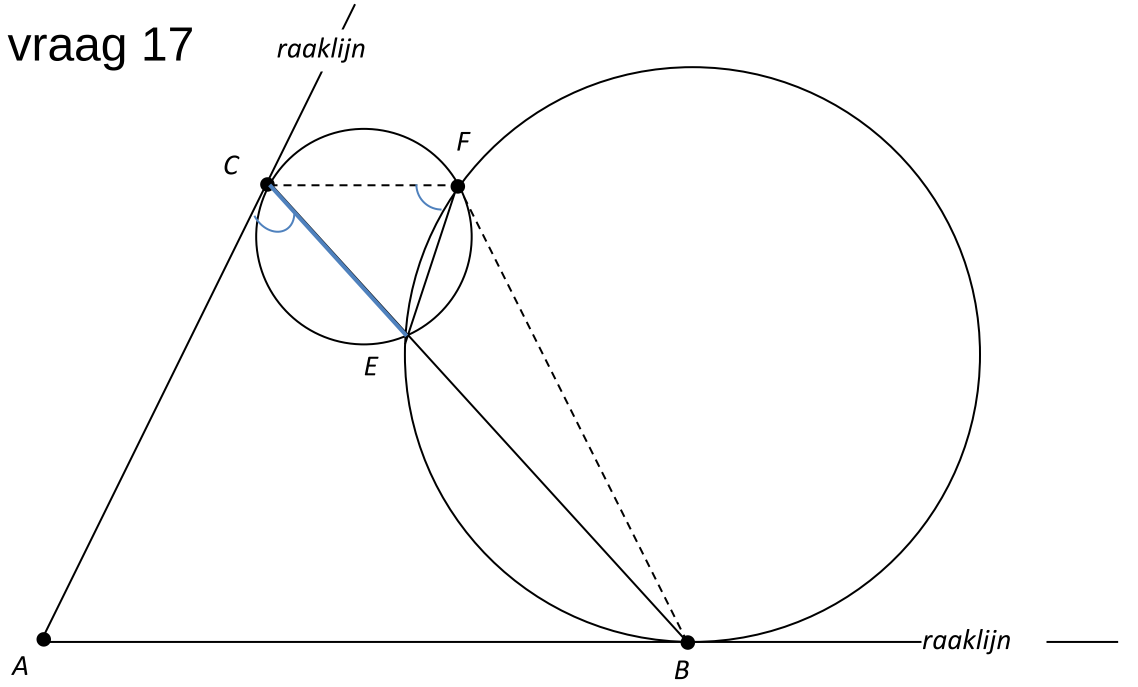
Te bewijzen: ABFC is een koordenvierhoek

2011 – I vraag 17



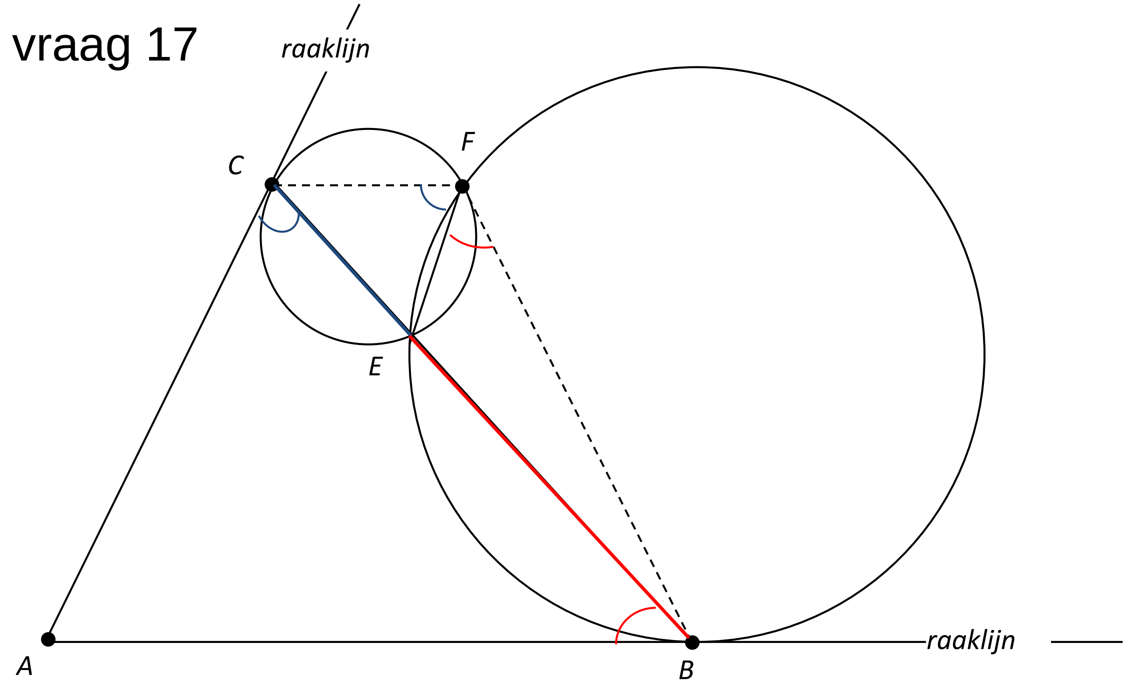
Trek CF en FB en toon aan dat hoek A + hoek F = 180^{o}

2011 – I vraag 17



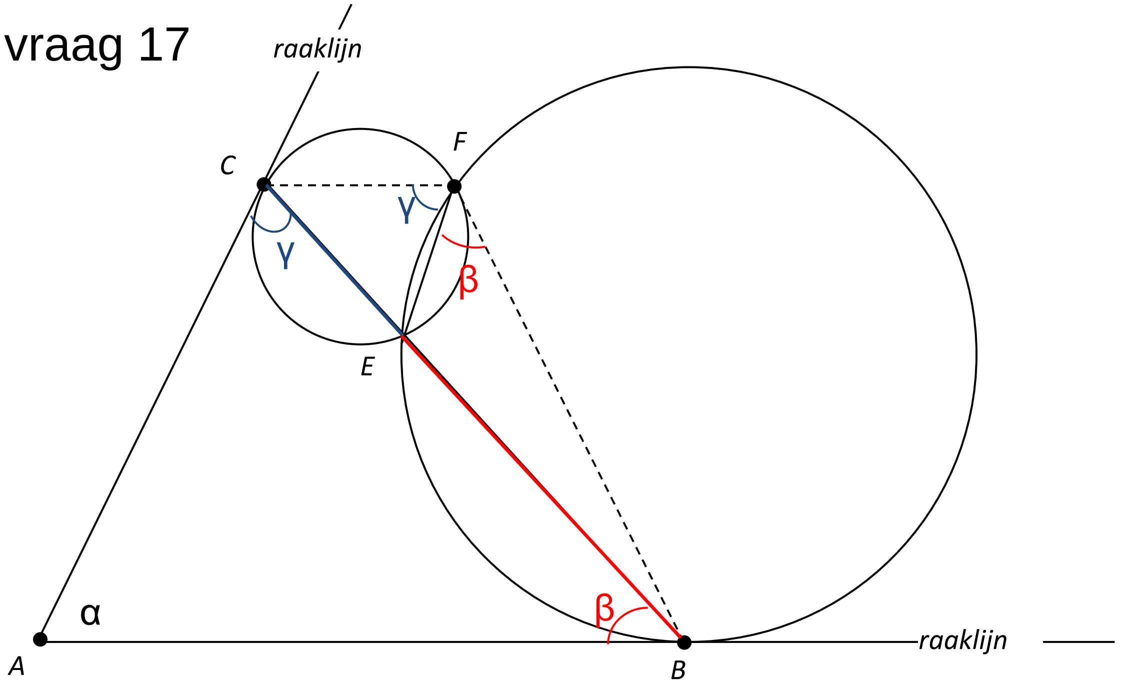
De blauwe hoeken bij F en C zijn gelijk, want staan beide op koorde CE (raaklijn-koorde stelling op koorde CE)

2011 – I vraag 17



De rode hoeken bij F en B zijn gelijk, want staan beide op koorde EB (raaklijn-koorde stelling op koorde EB)

2011 – I vraag 17

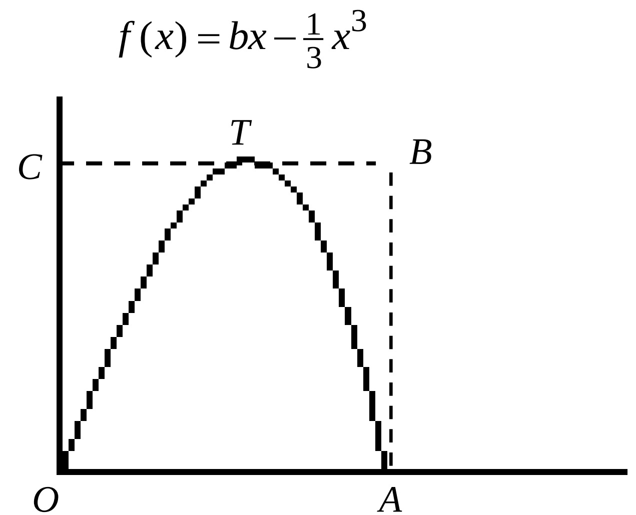


In driehoek ABC is $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$
maar de hoek bij F is $\beta + \gamma$
dus is hoek F + hoek A = $\beta + \gamma + \alpha = \alpha + \beta + \gamma = 180^o$

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.

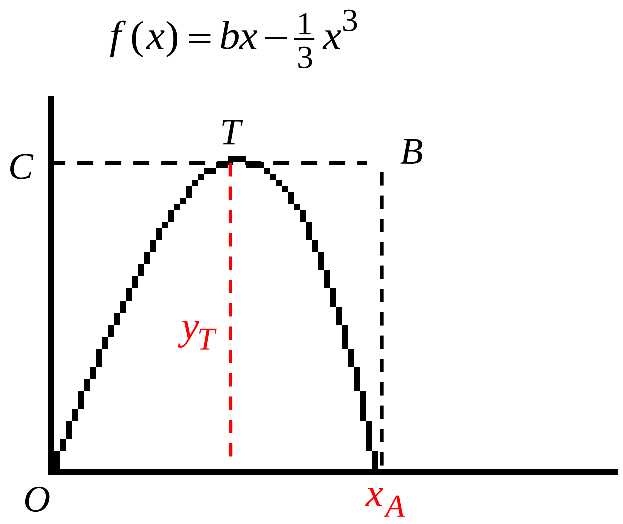


Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

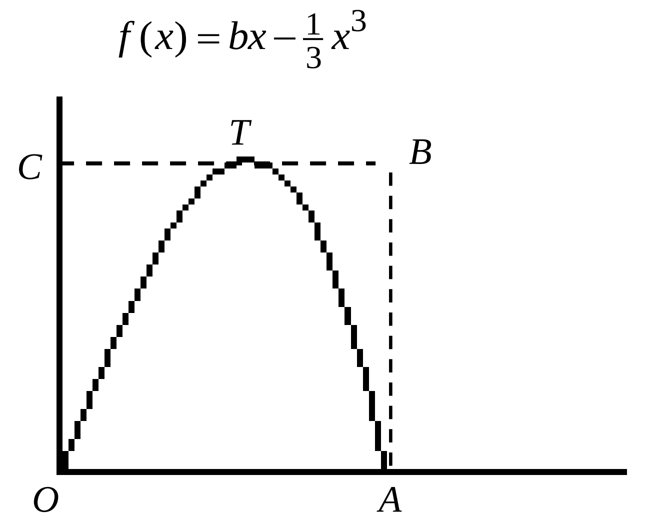
Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$

De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

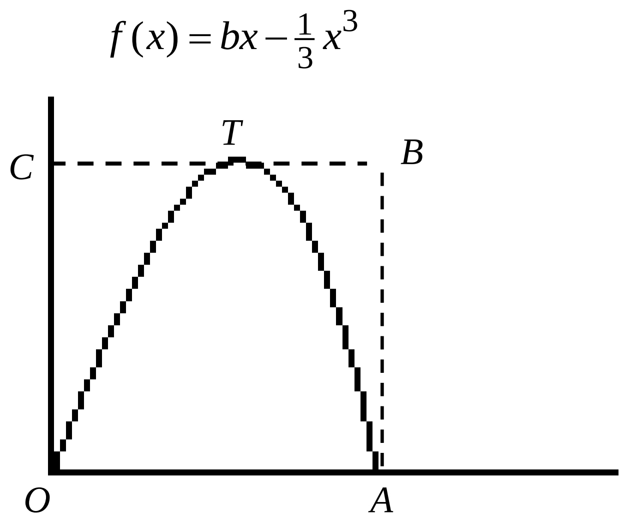
Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft:

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

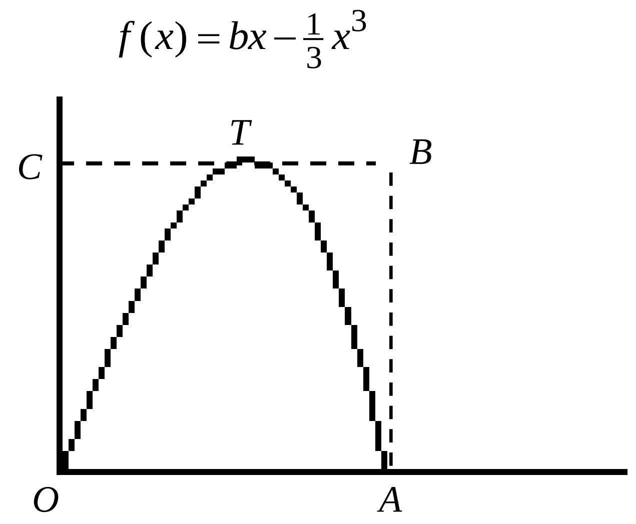
Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft $3bx - x^3 = 0$ dus $x \cdot (3b - x^2) = 0$ met $x_A = \sqrt{3b}$

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

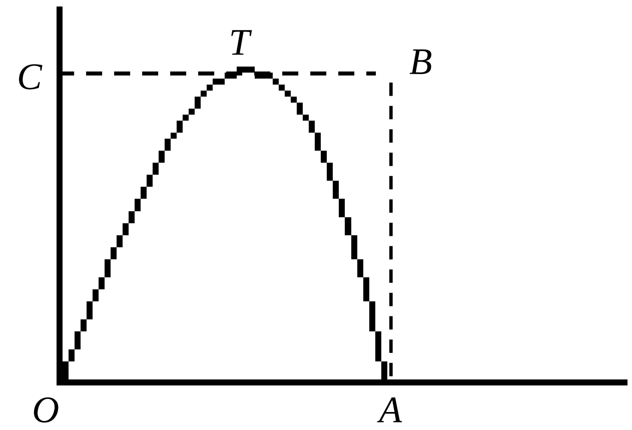
Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft $3bx - x^3 = 0$ dus $x \cdot (3b - x^2) = 0$ met $x_A = \sqrt{3b}$
- $f'(x) = b - x^2 = 0$ geeft:

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft $3bx - x^3 = 0$ dus $x \cdot (3b - x^2) = 0$ met $x_A = \sqrt{3b}$
- $f'(x) = b - x^2 = 0$ geeft $x_T = \sqrt{b}$ dus $y_T = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}b\sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$

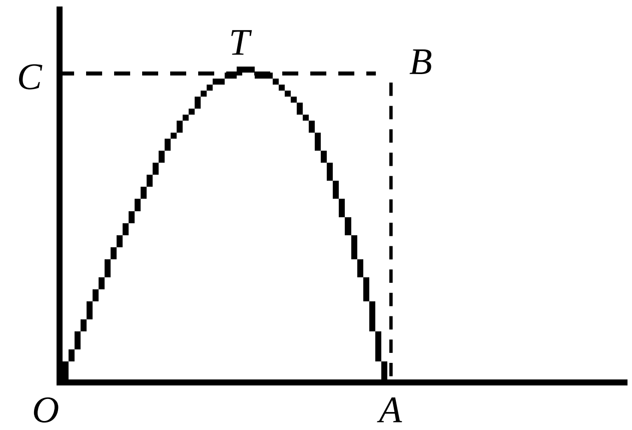
$(\sqrt{b})^3 = (\sqrt{b})^2 \cdot \sqrt{b} = b\sqrt{b}$

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x)=bx-\frac{1}{3}x^3$ met $b>0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.

$f(x)=bx-\frac{1}{3}x^3$



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

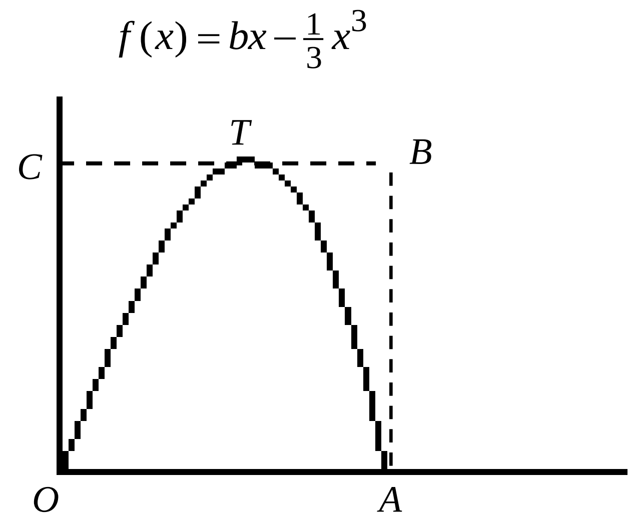
Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx-\frac{1}{3}x^3=0$ geeft $3bx-x^3=0$ dus $x\cdot(3b-x^2)=0$ met $x_A=\sqrt{3b}$
- $f'(x)=b-x^2=0$ geeft $x_T=\sqrt{b}$ dus $y_T=b\sqrt{b}-\frac{1}{3}(\sqrt{b})^3=b\sqrt{b}-\frac{1}{3}b\sqrt{b}=\frac{2}{3}b\sqrt{b}$
- $x_A=y_T$ dus:

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

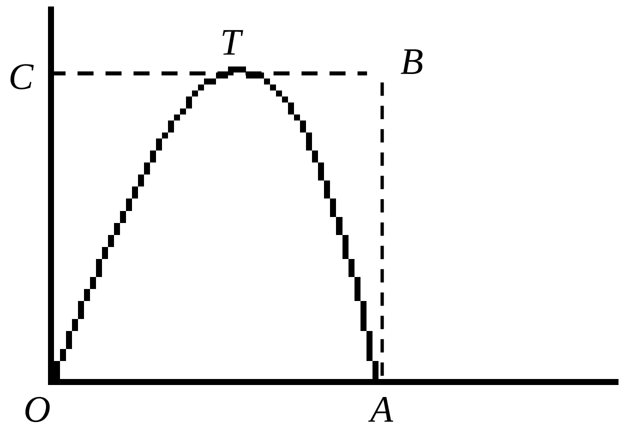
Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft $3bx - x^3 = 0$ dus $x \cdot (3b - x^2) = 0$ met $x_A = \sqrt{3b}$
- $f'(x) = b - x^2 = 0$ geeft $x_T = \sqrt{b}$ dus $y_T = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}b\sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$
- $x_A = y_T$ dus $\sqrt{3b} = \sqrt{3} \cdot \cancel{\sqrt{b}} = \frac{2}{3}b\cancel{\sqrt{b}}$

2011-I vraag 18

Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.



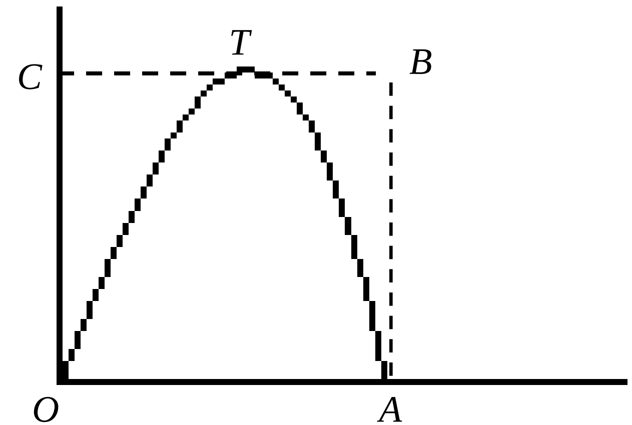
Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft $3bx - x^3 = 0$ dus $x \cdot (3b - x^2) = 0$ met $x_A = \sqrt{3b}$
- $f'(x) = b - x^2 = 0$ geeft $x_T = \sqrt{b}$ dus $y_T = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}b\sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$
- $x_A = y_T$ dus $\sqrt{3b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$ geeft $3\sqrt{3} = 2b$ dus $b = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

2011-I vraag 18

$f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$



Gegeven is $f(x) = bx - \frac{1}{3}x^3$ met $b > 0$.

De grafiek van f snijdt de positieve x-as in A. T is de top van de grafiek van f die ligt tussen de y-as en de verticale lijn door A. De x-as, de verticale lijn door A, de horizontale lijn door T en de y-as sluiten de rechthoek $OABC$ in.

Vraag 18. Bereken exact de waarde van b waarvoor rechthoek $OABC$ een vierkant is.

Het is een vierkant, dus OC moet gelijk zijn OA. Oftewel: $y_T = x_A$
De y-coördinaat van T moet gelijk zijn aan de x-coördinaat van A.

- $bx - \frac{1}{3}x^3 = 0$ geeft $3bx - x^3 = 0$ dus $x \cdot (3b - x^2) = 0$ met $x_A = \sqrt{3b}$
- $f'(x) = b - x^2 = 0$ geeft $x_T = \sqrt{b}$ dus $y_T = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = b\sqrt{b} - \frac{1}{3}b\sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$
- $x_A = y_T$ dus $\sqrt{3b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$ geeft $3\sqrt{3} = 2b$ dus $b = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ *is het zelfde*

[andere uitwerking: $\sqrt{3b} = \frac{2}{3}b\sqrt{b}$ kwadrateren geeft: $3b = \frac{4}{9}b^3$ met $b = \sqrt{6\frac{3}{4}}$]