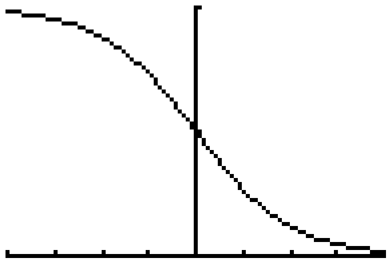
2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{x}}$

Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen:

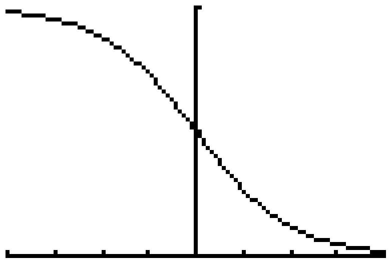
2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^x}$



Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1 + e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1 + e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: x

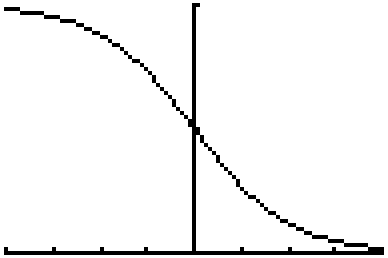
2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$



Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

2011-II De functie $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$



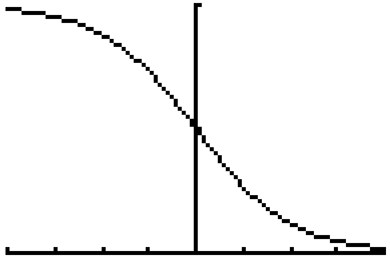
Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\frac{2}{1+e^x} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer:

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$



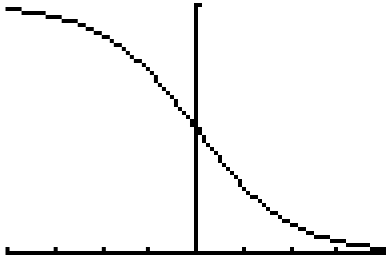
Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer: $F'(x) = 2 - 2 \cdot \dfrac{1}{1+e^x} \cdot e^x = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x}$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$



Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

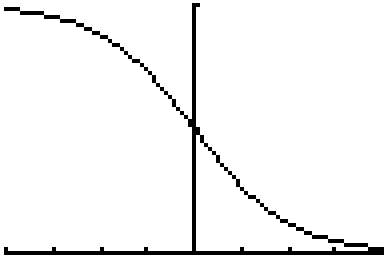
- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer: $F'(x) = 2 - 2 \cdot \dfrac{1}{1+e^x} \cdot e^x = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2+2e^x-2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2}{1+e^x} = f(x)$

$$\frac{2(1+e^x)}{1+e^x} - \frac{2e^x}{1+e^x}$$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$



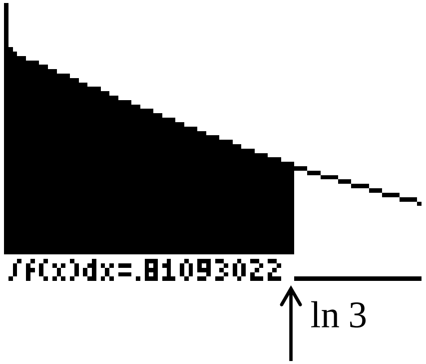
Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer: $F'(x) = 2 - 2\cdot\dfrac{1}{1+e^x}\cdot e^x = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2+2e^x-2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2}{1+e^x} = f(x)$

Vraag 3. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel,
ingesloten tussen de grafiek van f, de x-as en de y-as en de lijn $x = \ln 3$.



2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

Vraag 1. Bereken exact voor welke *x* geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer: $F'(x) = 2 - 2\cdot\dfrac{1}{1+e^x}\cdot e^x = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2+2e^x-2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2}{1+e^x} = f(x)$

Vraag 3. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel,
ingesloten tussen de grafiek van *f*, de *x*-as en de *y*-as en de lijn $x = \ln 3$.

$$\text{Opp} = \Big[2x - 2\ln(1+e^x)\Big]_0^{\ln 3} = 2\ln 3 - 2\ln(1+e^{\ln 3}) - (0 - 2\ln(2))$$

$e^{\ln 3} = 3$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \Leftrightarrow 1+e^x = 200 \Leftrightarrow e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer: $F'(x) = 2 - 2 \cdot \dfrac{1}{1+e^x} \cdot e^x = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2+2e^x-2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2}{1+e^x} = f(x)$

Vraag 3. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel,
ingesloten tussen de grafiek van f, de x-as en de y-as en de lijn $x = \ln 3$.

$$\text{Opp} = \Big[2x - 2\ln(1+e^x)\Big]_0^{\ln 3} = 2\ln 3 - 2\ln(1+e^{\ln 3}) - (0 - 2\ln(2))$$

$$\text{Opp} = 2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2$$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

Vraag 1. Bereken exact voor welke x geldt: $f(x) < 0{,}01$.

- De vergelijking oplossen: $\dfrac{2}{1+e^x} = \dfrac{1}{100} \iff 1+e^x = 200 \iff e^x = 199$
- Kijk in de grafiek. De exacte oplossing van de ongelijkheid is: $x > \ln 199$

Vraag 2. Toon aan dat $F(x) = 2x - 2\ln(1 + e^x)$ een primitieve is van $f(x)$.

Differentieer: $F'(x) = 2 - 2 \cdot \dfrac{1}{1+e^x} \cdot e^x = 2 - \dfrac{2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2+2e^x-2e^x}{1+e^x} = \dfrac{2}{1+e^x} = f(x)$

Vraag 3. Bereken exact de oppervlakte van het vlakdeel,
ingesloten tussen de grafiek van f, de x-as en de y-as en de lijn $x = \ln 3$.

$$\text{Opp} = \Big[2x - 2\ln(1+e^x)\Big]_0^{\ln 3} = 2\ln 3 - 2\ln(1+e^{\ln 3}) - (0 - 2\ln(2))$$

$$\text{Opp} = 2\ln 3 - 2\ln 4 + 2\ln 2$$

$$\text{Opp} = \ln 9 - \ln 16 + \ln 4 = \ln(\tfrac{9}{16} \cdot 4) = \ln(\tfrac{9}{4})$$ [exact]

2011-II De functie $f(x) = \frac{2}{1 + e^{x}}$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke x geldt: $\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$

Toon aan, dat $f(x) + f(-x) = 2$ voor elke waarde van x.

$f(x) + f(-x) =$

2011-II De functie $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{x}}$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke x geldt: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=1$

Toon aan, dat $f(x) + f(-x) = 2$ voor elke waarde van x.

$$f(x)+f(-x)=\frac{2}{1+e^{x}}+\frac{2}{1+e^{-x}}=$$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{x}}$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke *x* geldt: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 1$

Toon aan, dat $f(x) + f(-x) = 2$ voor elke waarde van x.

$$f(x)+f(-x) = \frac{2}{1+e^{x}} + \frac{2}{1+e^{-x}} =$$

$$\frac{2+2e^{-x}+2+2e^{x}}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} =$$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{x}}$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke x geldt: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 1$

Toon aan, dat $f(x) + f(-x) = 2$ voor elke waarde van x.

$$f(x) + f(-x) = \frac{2}{1+e^{x}} + \frac{2}{1+e^{-x}} =$$

$$\frac{2+2e^{-x}+2+2e^{x}}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} = \frac{4+2(e^{x}+e^{-x})}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} = 2\cdot\frac{2+e^{x}+e^{-x}}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} =$$

2011-II De functie $$f(x) = \frac{2}{1+e^{x}}$$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke *x* geldt: $$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 1$$

Toon aan, dat $f(x) + f(-x) = 2$ voor elke waarde van x.

$$f(x)+f(-x) = \frac{2}{1+e^{x}} + \frac{2}{1+e^{-x}} =$$

$$\frac{2+2e^{-x}+2+2e^{x}}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} = \frac{4+2(e^{x}+e^{-x})}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} = 2\cdot\frac{2+e^{x}+e^{-x}}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} =$$

$$2\cdot\frac{2+e^{x}+e^{-x}}{1+e^{-x}+e^{x}+e^{x-x}} =$$

2011-II De functie $f(x)=\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke *x* geldt: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=1$

Toon aan, dat $f(x)+f(-x)=2$ voor elke waarde van x.

$$f(x)+f(-x)=\frac{2}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}=$$

$$\frac{2+2\mathrm{e}^{-x}+2+2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}=\frac{4+2(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}=2\cdot\frac{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^{-x})}=$$

$$2\cdot\frac{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{x-x}}=2\cdot\frac{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x+1}=2\cdot\frac{2+\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}=2$$

$$\mathrm{e}^0=1$$

2011-II De functie $f(x) = \dfrac{2}{1+e^x}$

Vraag 4. Toon aan dat voor elke *x* geldt: $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 1$

Toon aan, dat $f(x) + f(-x) = 2$ voor elke waarde van x.

$$f(x)+f(-x) = \frac{2}{1+e^x} + \frac{2}{1+e^{-x}} =$$

$$\frac{2+2e^{-x}+2+2e^x}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{4+2(e^x+e^{-x})}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = 2\cdot\frac{2+e^x+e^{-x}}{(1+e^x)(1+e^{-x})} =$$

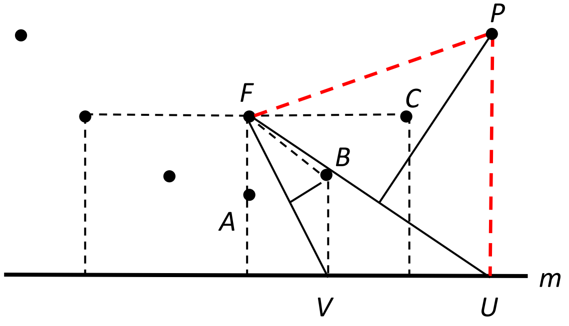
$$2\cdot\frac{2+e^x+e^{-x}}{1+e^{-x}+e^x+e^{x-x}} = 2\cdot\frac{2+e^x+e^{-x}}{1+e^{-x}+e^x+1} = 2\cdot\frac{2+e^x+e^{-x}}{2+e^{-x}+e^x} = 2 \quad \text{klopt}$$

2011-II Gelijke afstanden vraag 5 en 6

Meetkundige plaatsen

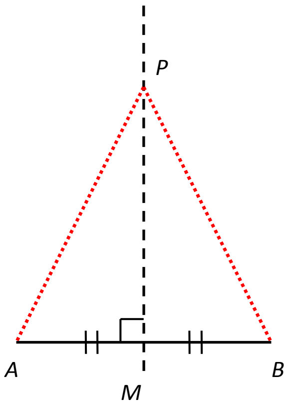
Je moet bij de opgaven 5 en 6 weten wat een parabool is:

Een *parabool* is de verzameling (*meetkundige plaats*) van de punten *P*, die gelijke afstand hebben tot een vast punt *F* (het *brandpunt*) en een vaste lijn *m* (de *richtlijn*).



En wat een middelloodlijn is:

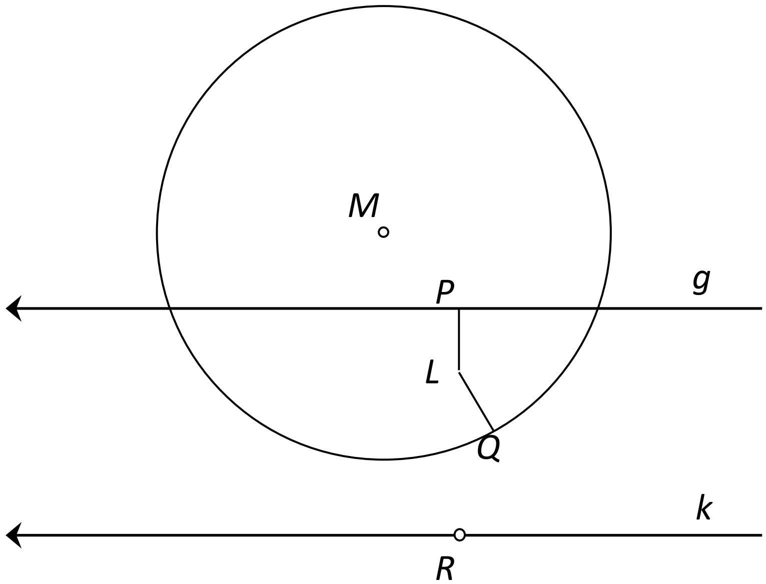
Een *middelloodlijn* is de verzameling punten *P* die gelijke afstand hebben tot twee vaste punten (*A* en *B*).



2011-II Gelijke afstanden vraag 5

Het punt M is het middelpunt van een cirkelboog.
De straal van de cirkel is even groot als de afstand tussen de evenwijdige lijnen g en k.

We bekijken de punten die op gelijke afstand van lijn g en de cirkel liggen. In de figuur is zo'n punt L getekend: de afstand LP van punt L tot g is gelijk aan de afstand LQ van punt L tot de cirkel. Hierin is P de loodrechte projectie van L op g en is Q het snijpunt van de lijn door M en L met de cirkelboog.



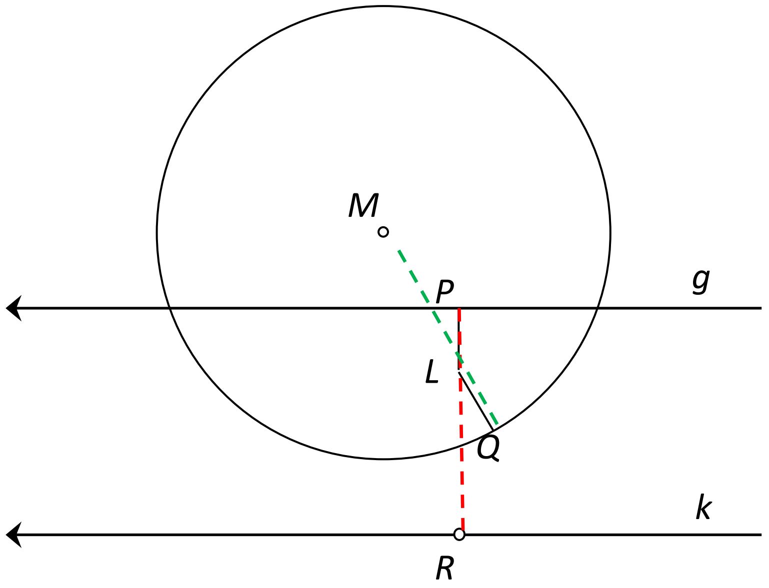
Punt R is de loodrechte projectie van L op k. Dus L ligt op PR en PR is de afstand tussen g en k.

Gegeven: d(L, g) = LP = d(L, cirkel) = LQ. PR staat loodrecht op g en k.

Te bewijzen: L ligt op de middelloodlijn van MR.

2011-II Gelijke afstanden vraag 5

Het punt *M* is het middelpunt van een cirkelboog. De straal van de cirkel is even groot als de afstand tussen de evenwijdige lijnen *g* en *k*.



We bekijken de punten die op gelijke afstand van lijn g en de cirkel liggen. In de figuur is zo’n punt *L* getekend: de afstand *LP* van punt *L* tot g is gelijk aan de afstand *LQ* van punt *L* tot de cirkel. Hierin is *P* de loodrechte projectie van *L* op *g* en is *Q* het snijpunt van de lijn door *M* en *L* met de cirkelboog.

Punt *R* is de loodrechte projectie van *L* op *k*. Dus *L* ligt op *PR* en *PR* is de afstand tussen *g* en *k*.

Gegeven: d(L, g) = *LP* = d(L, cirkel) = *LQ*. *PR* staat loodrecht op *g* en *k*.

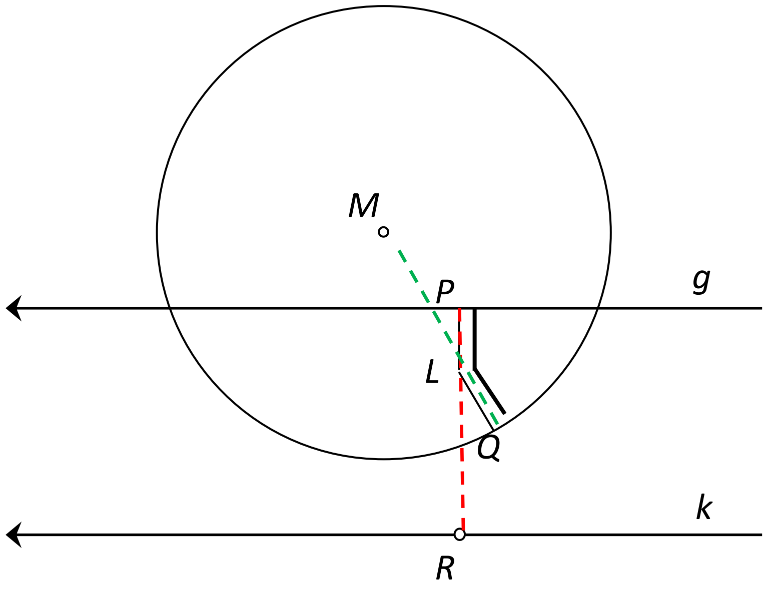
Te bewijzen: *L* ligt op de middelloodlijn van *MR*.

Bewijs: • *PR* = *MQ* en

2011-II Gelijke afstanden vraag 5

Het punt M is het middelpunt van een cirkelboog. De straal van de cirkel is even groot als de afstand tussen de evenwijdige lijnen g en k.

We bekijken de punten die op gelijke afstand van lijn g en de cirkel liggen. In de figuur is zo'n punt L getekend: de afstand $\boldsymbol{LP}$ van punt L tot g is gelijk aan de afstand $\boldsymbol{LQ}$ van punt L tot de cirkel. Hierin is P de loodrechte projectie van L op g en is Q het snijpunt van de lijn door M en L met de cirkelboog.



Punt R is de loodrechte projectie van L op k. Dus L ligt op PR en PR is de afstand tussen g en k.

Gegeven: d(L, g) = LP = d(L, cirkel) = LQ. PR staat loodrecht op g en k.

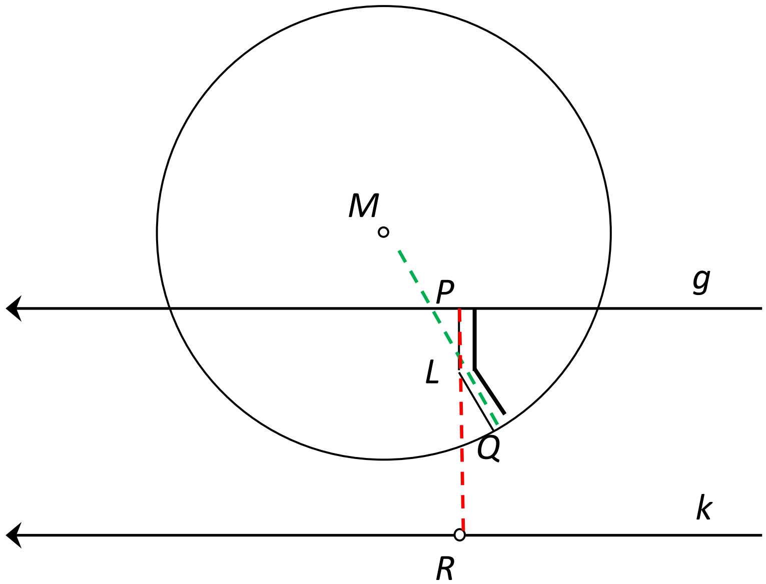
Te bewijzen: L ligt op de middelloodlijn van MR.

Bewijs: • $PR = MQ$ en $\boldsymbol{LP} = \boldsymbol{LQ}$ (gegeven)

2011-II Gelijke afstanden vraag 5

Het punt *M* is het middelpunt van een cirkelboog. De straal van de cirkel is even groot als de afstand tussen de evenwijdige lijnen *g* en *k*.

We bekijken de punten die op gelijke afstand van lijn g en de cirkel liggen. In de figuur is zo'n punt *L* getekend: de afstand *LP* van punt *L* tot g is gelijk aan de afstand *LQ* van punt *L* tot de cirkel. Hierin is *P* de loodrechte projectie van *L* op *g* en is *Q* het snijpunt van de lijn door *M* en *L* met de cirkelboog.



Punt *R* is de loodrechte projectie van *L* op *k*. Dus *L* ligt op *PR* en *PR* is de afstand tussen *g* en *k*.

Gegeven: d(L, g) = *LP* = d(L, cirkel) = *LQ*. *PR* staat loodrecht op *g* en *k*.

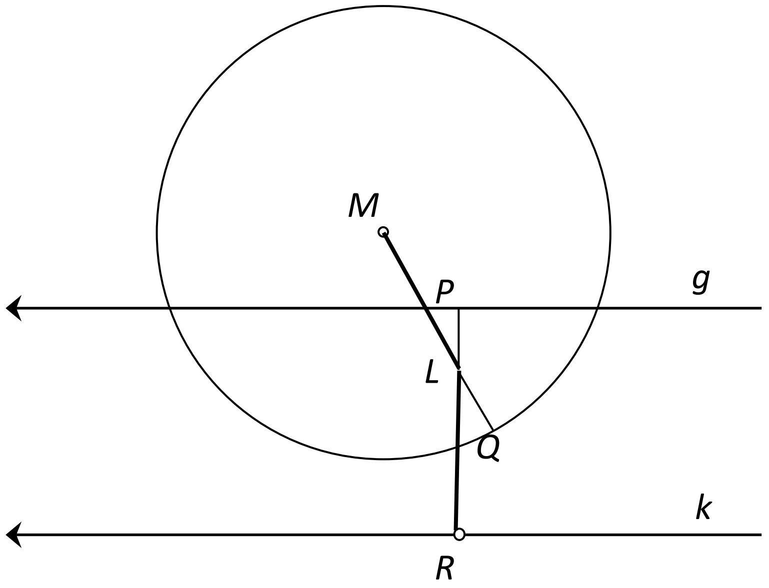
Te bewijzen: *L* ligt op de middelloodlijn van *MR*.

Bewijs:

- $PR = MQ$ en $LP = LQ$ (gegeven)
- $ML = MQ - LQ$ en $LR = PR - PL$
- Dus:

2011-II Gelijke afstanden vraag 5

Het punt M is het middelpunt van een cirkelboog. De straal van de cirkel is even groot als de afstand tussen de evenwijdige lijnen g en k.



We bekijken de punten die op gelijke afstand van lijn g en de cirkel liggen. In de figuur is zo'n punt L getekend: de afstand LP van punt L tot g is gelijk aan de afstand LQ van punt L tot de cirkel. Hierin is P de loodrechte projectie van L op g en is Q het snijpunt van de lijn door M en L met de cirkelboog.

Punt R is de loodrechte projectie van L op k. Dus L ligt op PR en PR is de afstand tussen g en k.

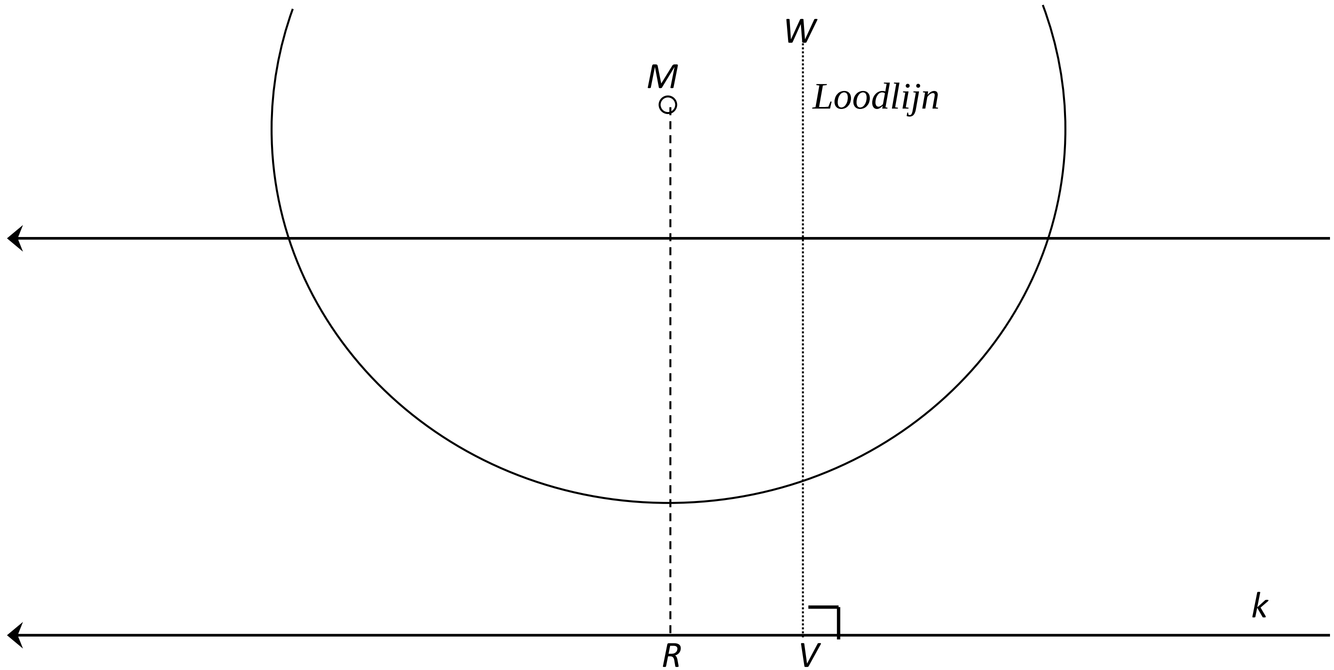
Gegeven: d(L, g) = LP = d(L, cirkel) = LQ. PR staat loodrecht op g en k.

Te bewijzen: L ligt op de middelloodlijn van MR.

Bewijs:
- $PR = MQ$ en $LP = LQ$ (gegeven)
- $ML = MQ - LQ$ en $LR = PR - PL$
- Dus $\boldsymbol{ML = LR}$

Conclusie: L ligt op de middelloodlijn van MR.

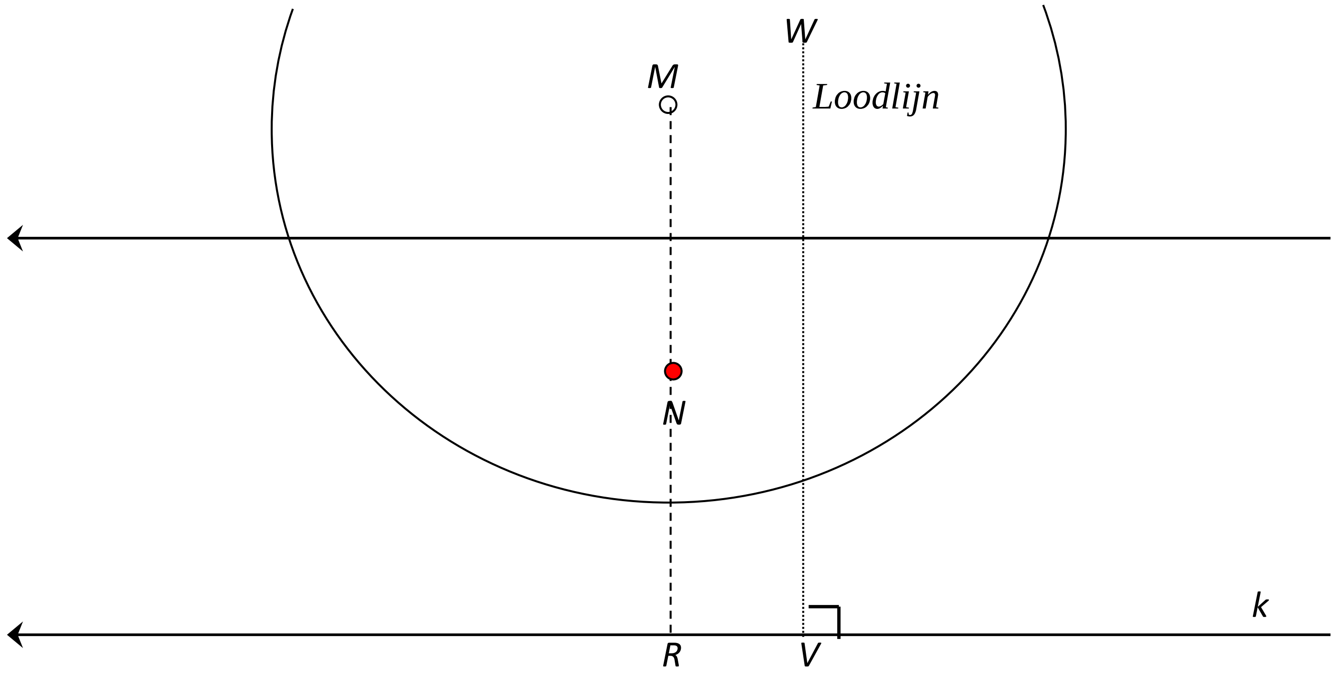
2011-II Gelijke afstanden vraag 6



Vraag 6: Teken de parabool.

Elk punt van de parabool is het snijpunt van een loodlijn en een middelloodlijn.
Teken loodlijnen zoals *VW* op lijn *k*.

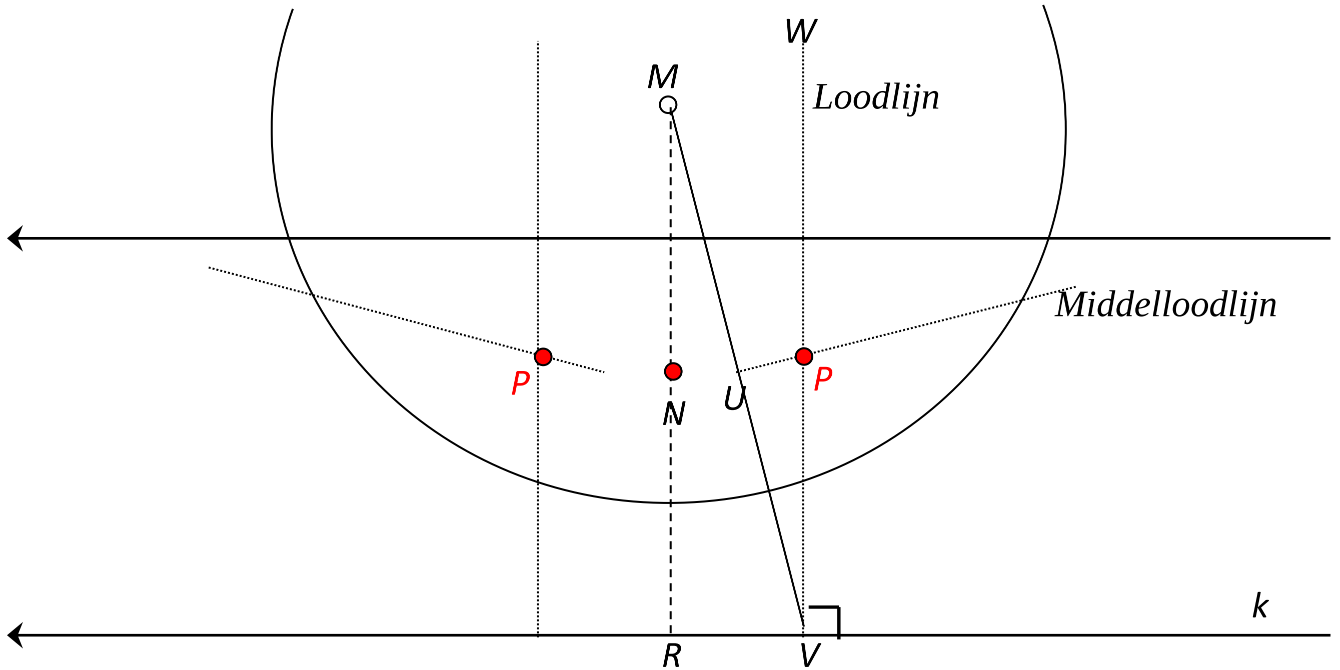
2011-II Gelijke afstanden



Vraag 6: Teken de parabool.

Elk punt van de parabool is het snijpunt van een loodlijn en een middelloodlijn.
Teken loodlijnen zoals *VW* op lijn *k*.
N is het midden van *MR*.

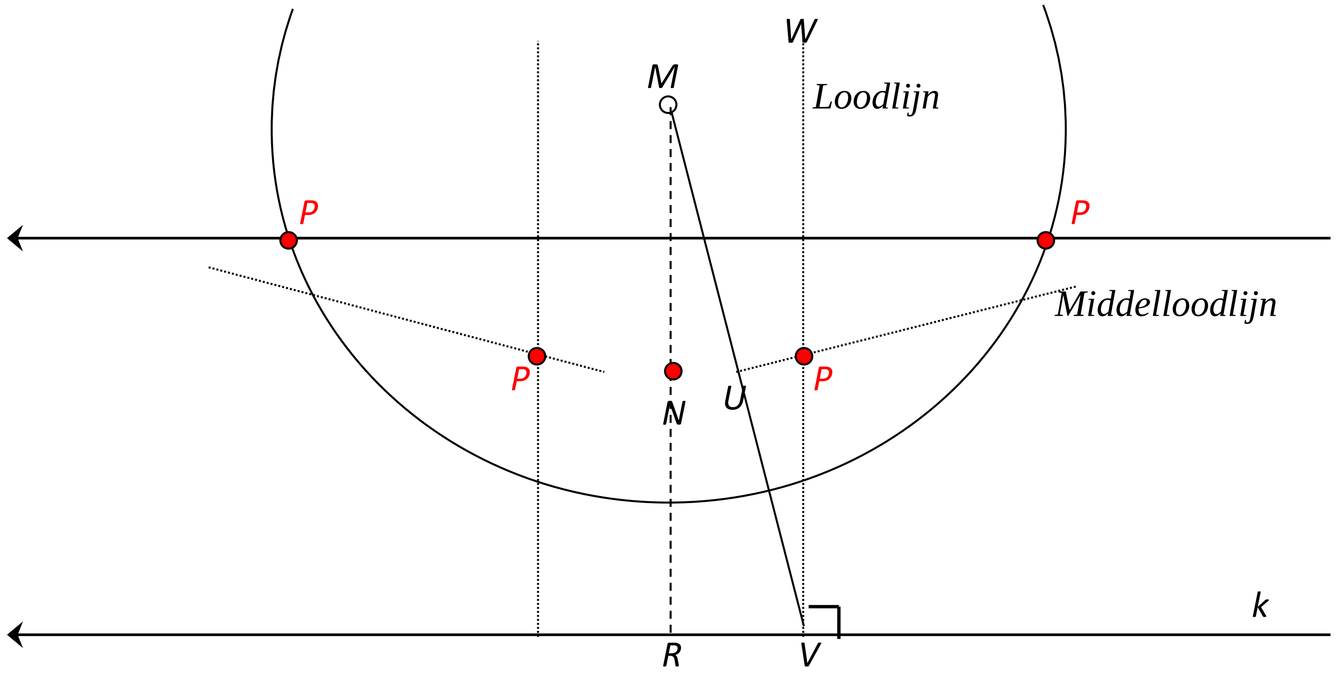
2011-II Gelijke afstanden



Vraag 6: Teken de parabool.

Elk punt van de parabool is het snijpunt van een loodlijn en een middelloodlijn.
Teken loodlijnen zoals *VW* op lijn *k*.
N is het midden van *MR*.
Teken de middelloodlijn van *MV* en snijd die met de loodlijn *VW*.

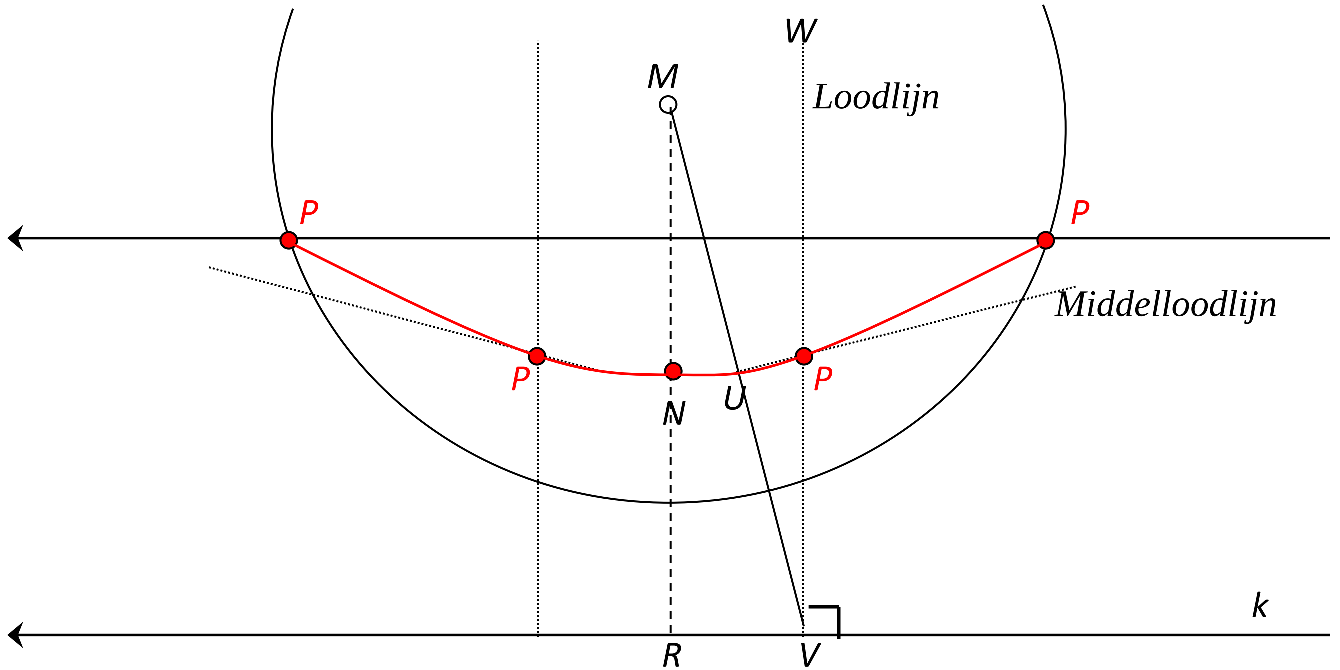
2011-II Gelijke afstanden



Vraag 6: Teken de parabool.

Elk punt van de parabool is het snijpunt van een loodlijn en een middelloodlijn.
Teken loodlijnen zoals *VW* op lijn *k*.
N is het midden van *MR*.
Teken de middelloodlijn van *MV* en snijd die met de loodlijn *VW*.
Het snijpunt is een punt (*P*) van de parabool.

2011-II Gelijke afstanden

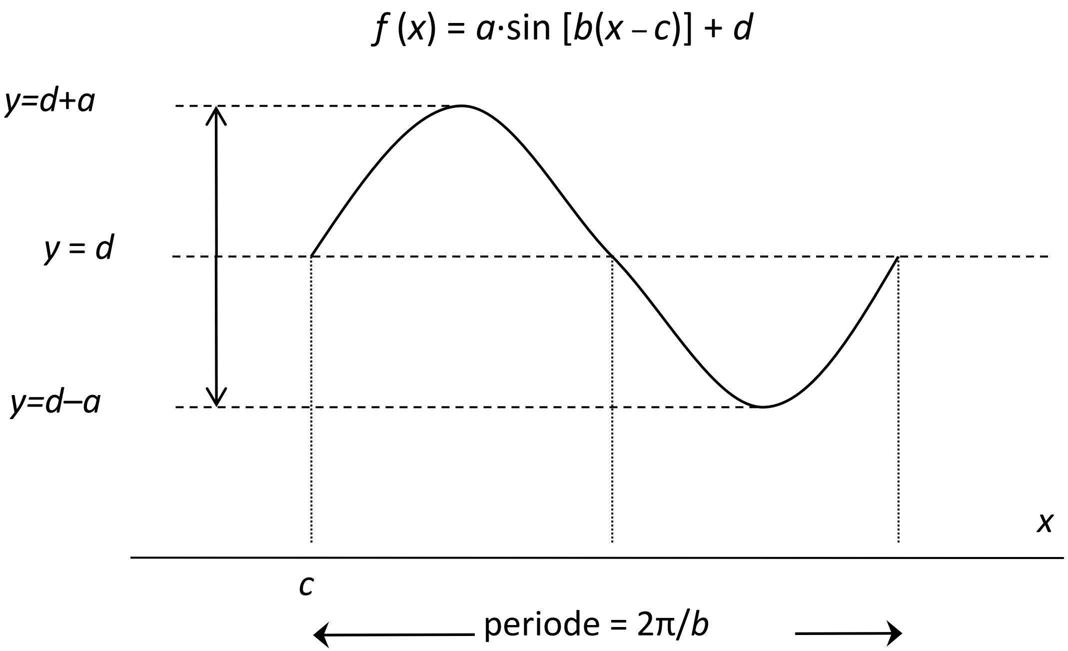


Vraag 6: Teken de parabool.

Elk punt van de parabool is het snijpunt van een loodlijn en een middelloodlijn.
Teken loodlijnen zoals *VW* op lijn *k*.
N is het midden van *MR*.
Teken de middelloodlijn van *MV* en snijd die met de loodlijn *VW*.
Teken een vloeiende kromme door enkele punten.

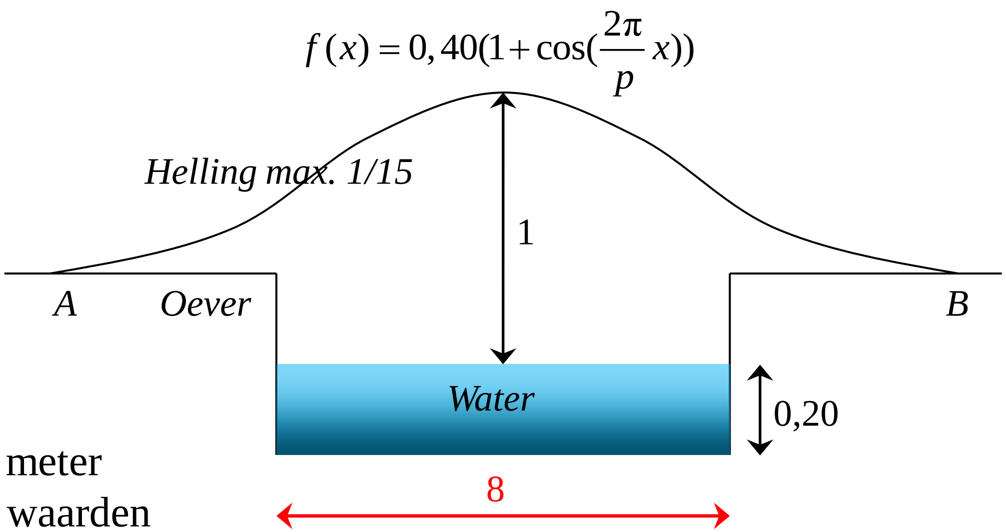
2011-II: vraag 7 t/m 10 De sinusgolf

- a = amplitude
- $b = 2\pi$ / periode
- periode = golflengte
- (c, d) = startpunt van de golf
- $y = d$ = evenwichtslijn



2011-II Goniometrie

De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.



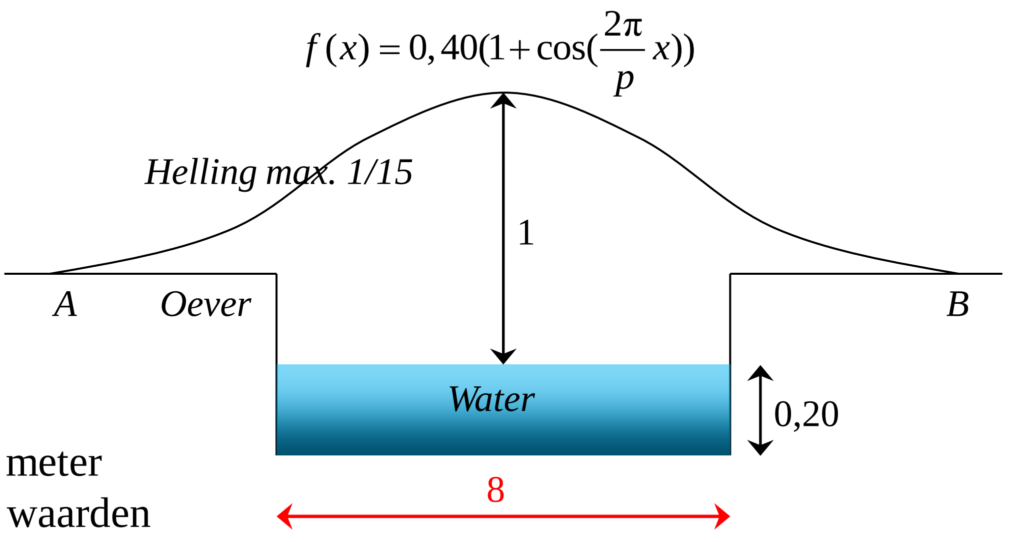
De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: . . .

2011-II Goniometrie

De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.



De afmetingen zijn in meters.

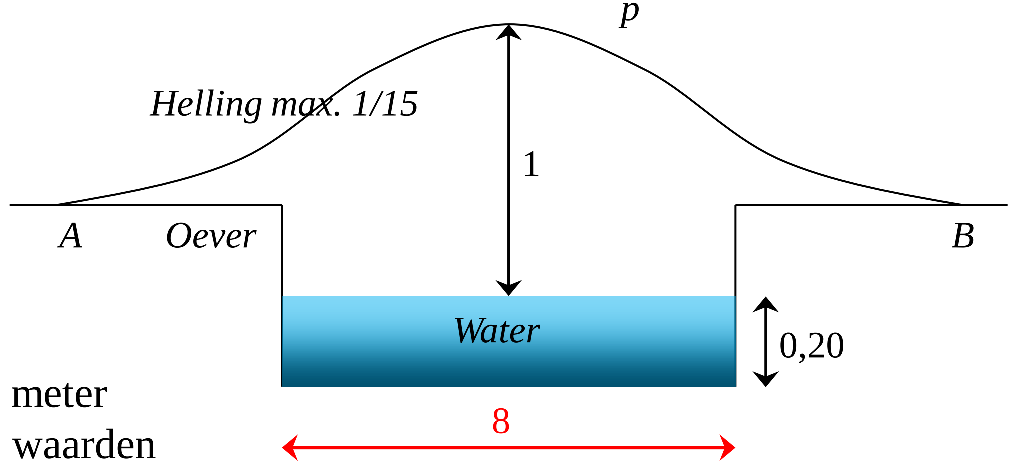
Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van *p* is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \frac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van *p* is dat zo?

2011-II Goniometrie

$$f(x) = 0{,}40(1 + \cos(\frac{2\pi}{p}x))$$



De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.

De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn,

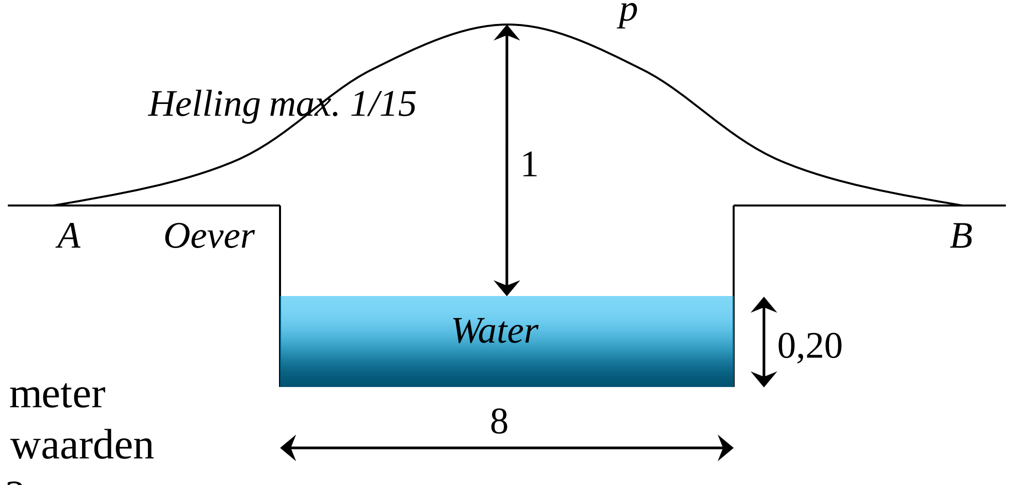
dus: $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \dfrac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van p is dat zo?

Helling = afgeleide dus . . .

2011-II Goniometrie

$$f(x) = 0{,}40(1 + \cos(\frac{2\pi}{p}x))$$



De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.

De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \dfrac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

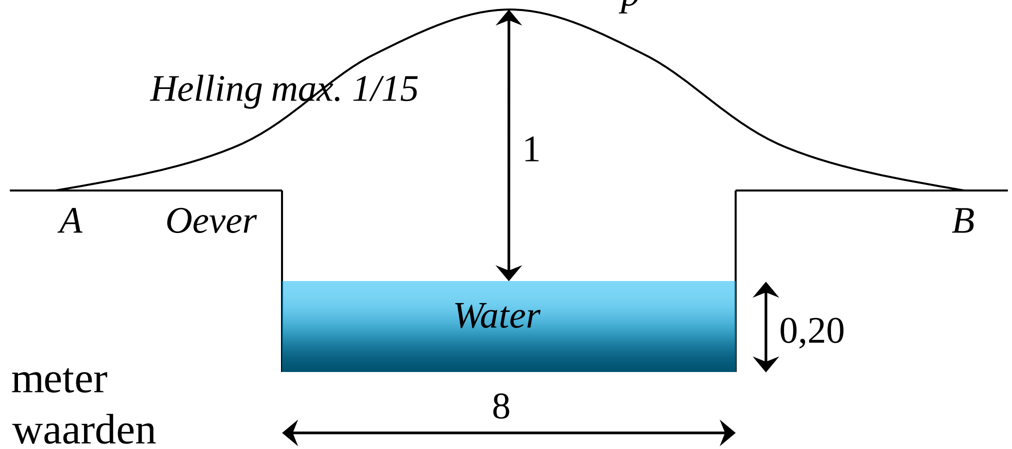
Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van p is dat zo?

$$f'(x) = -0{,}40\sin(\frac{2\pi}{p}x)\cdot\frac{2\pi}{p} = -\frac{08\pi}{p}\sin(\frac{2\pi}{p}x)$$

kettingregel

2011-II Goniometrie

$$f(x) = 0,40(1+\cos(\frac{2\pi}{p}x))$$



De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.

De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \frac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

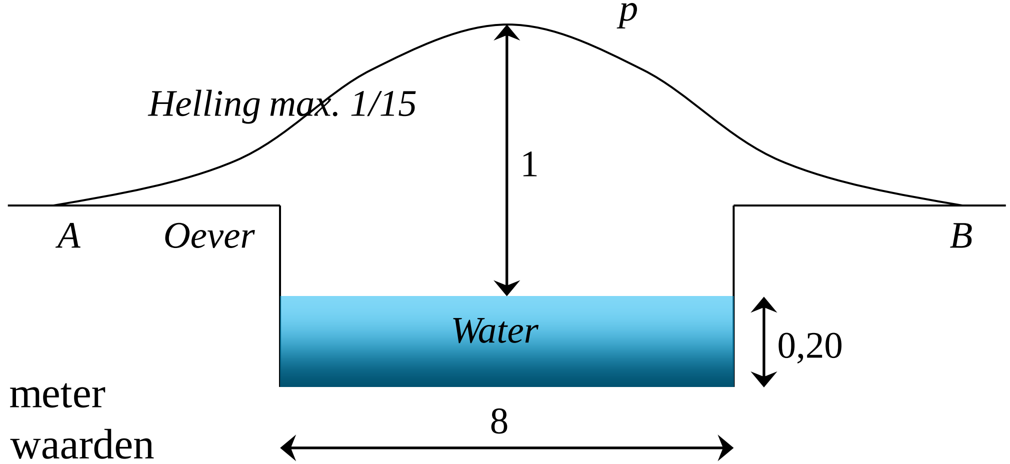
Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van p is dat zo?

$$f'(x) = -0,40\sin(\frac{2\pi}{p}x)\cdot\frac{2\pi}{p} = -\frac{08\pi}{p}\sin(\frac{2\pi}{p}x)$$

De helling is maximaal, als . . .

2011-II Goniometrie

$$f(x) = 0,40(1+\cos(\frac{2\pi}{p}x))$$



De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.

De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \dfrac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

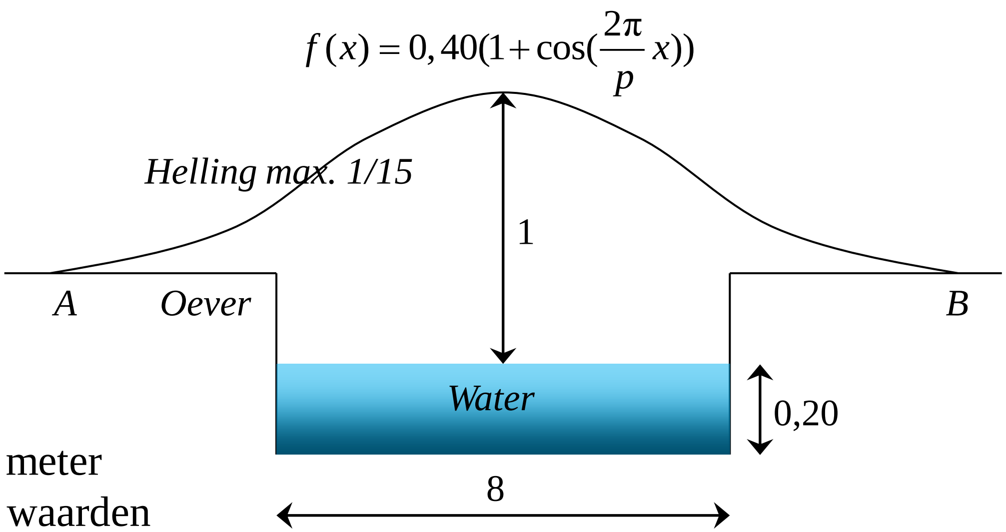
Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van p is dat zo?

$$f'(x) = -0,40\sin(\frac{2\pi}{p}x)\cdot\frac{2\pi}{p} = -\frac{08\pi}{p}\sin(\frac{2\pi}{p}x)$$

De helling is maximaal, *als de sinus minimaal is, vanwege het minteken*.

2011-II Goniometrie

De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.



De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: $\dfrac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \dfrac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van p is dat zo?

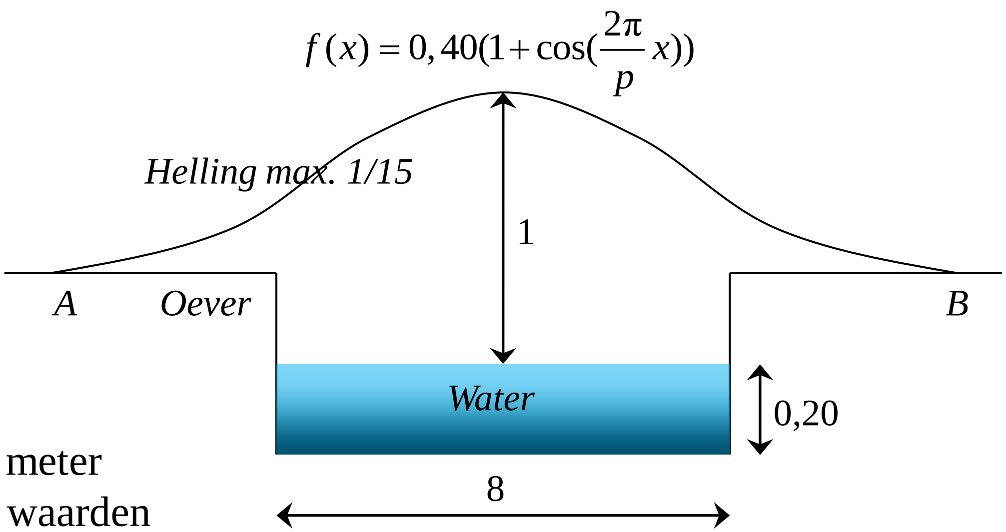
$$f'(x) = -0,40\sin(\frac{2\pi}{p}x)\cdot\frac{2\pi}{p} = -\frac{08\pi}{p}\sin(\frac{2\pi}{p}x)$$

De helling is maximaal, als de sinus – 1 is.

Conclusie:

2011-II Goniometrie

De gegevens over een te bouwen brug staan hiernaast samengevat in de tekening.



De afmetingen zijn in meters.

Vraag 7. De brug moet minstens 8 meter overspannen. Voor welke waarden van p is hier aan voldaan?

De periode *AB* van de sinusgolf moet > 8 (meter) zijn, dus: $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{p}} > 8$ dus $2\pi \cdot \frac{p}{2\pi} > 8$ dus $p > 8$

Vraag 8. De helling moet maximaal 1/15 zijn. Voor welke waarden van p is dat zo?

$$f'(x) = -0,40\sin(\frac{2\pi}{p}x)\cdot\frac{2\pi}{p} = -\frac{08\pi}{p}\sin(\frac{2\pi}{p}x)$$

De helling is maximaal, als de sinus – 1 is.

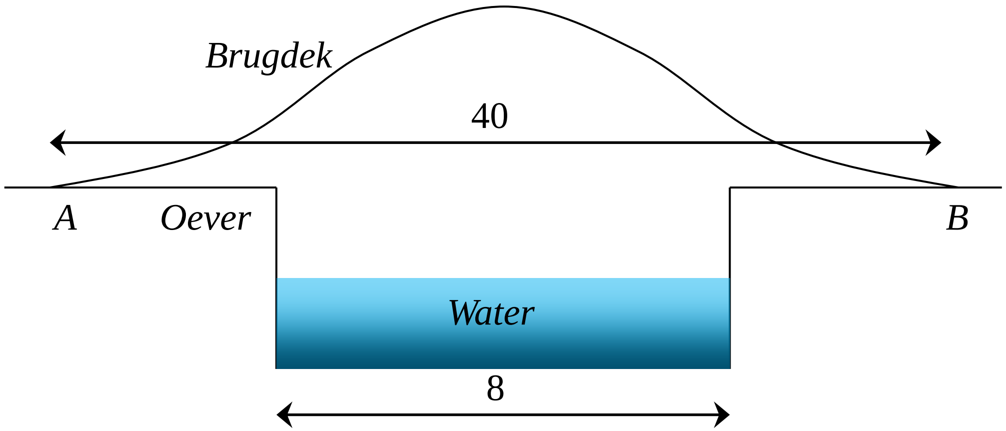
Conclusie: $\frac{0,8\pi}{p} < \frac{1}{15}$ dus $p > 12\pi$ [of: $p > 37,7$]

2011-II   Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.

$$f(x) = 0{,}40(1 + \cos(\frac{\pi}{20}x))$$

Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.

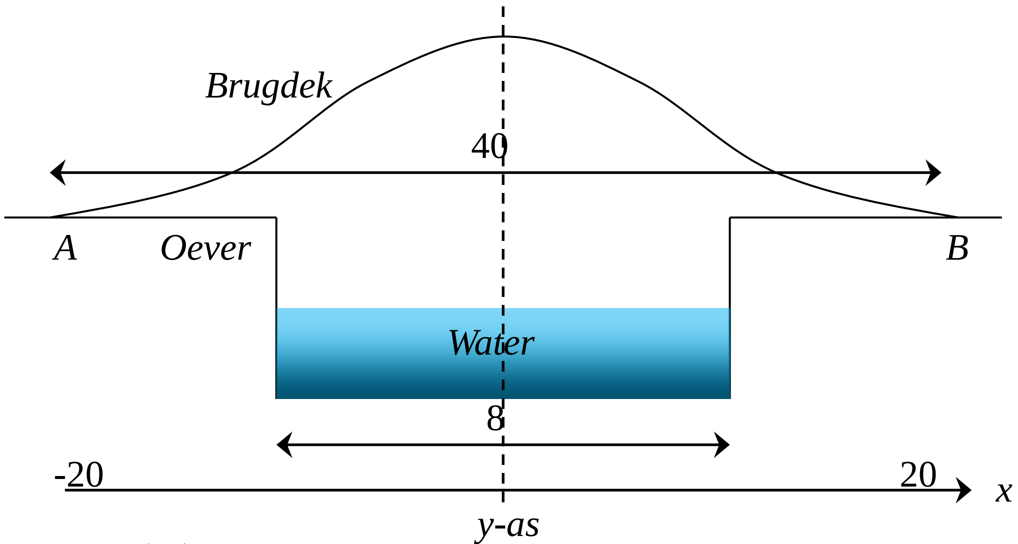


2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.

$$f(x) = 0{,}40(1 + \cos(\frac{\pi}{20}x))$$

Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens. De GR mag (dus) gebruikt worden.



De afstand *AB* = 40 (m) dus $-20 \leq x_A \leq +20$ (m)

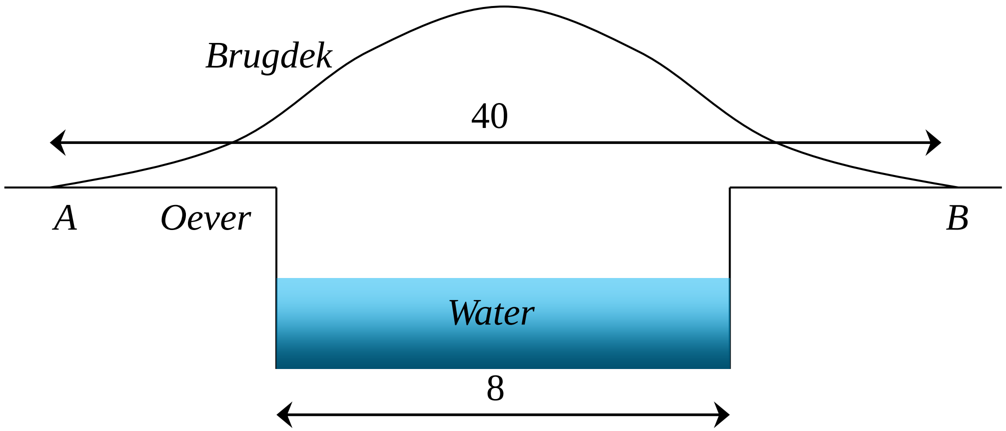
2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.

$$f(x) = 0,40(1+\cos(\frac{\pi}{20}x))$$

Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.

Formule booglengte?



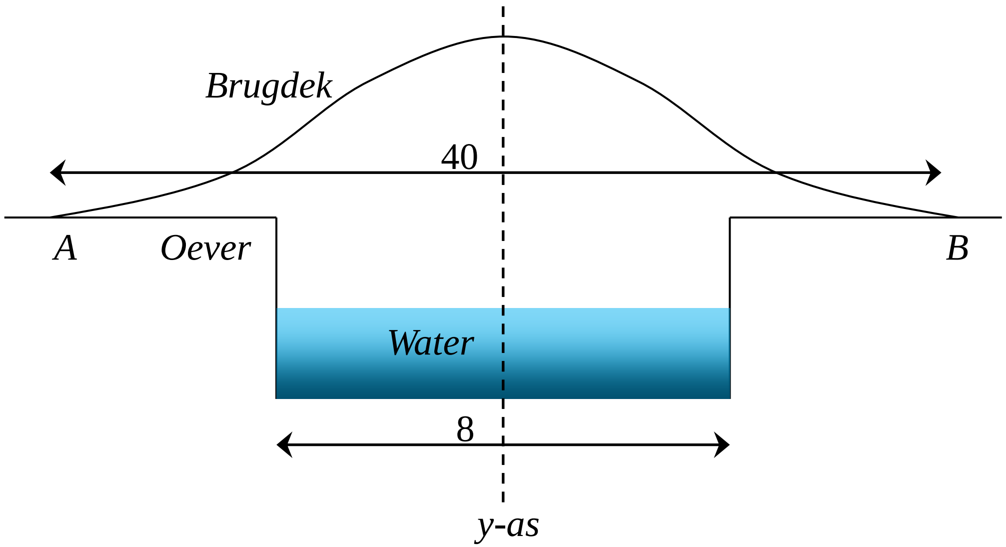
2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.

$$f(x) = 0{,}40(1 + \cos(\frac{\pi}{20}x))$$

Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.

booglengte: $\int_{-20}^{20} \sqrt{(1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$

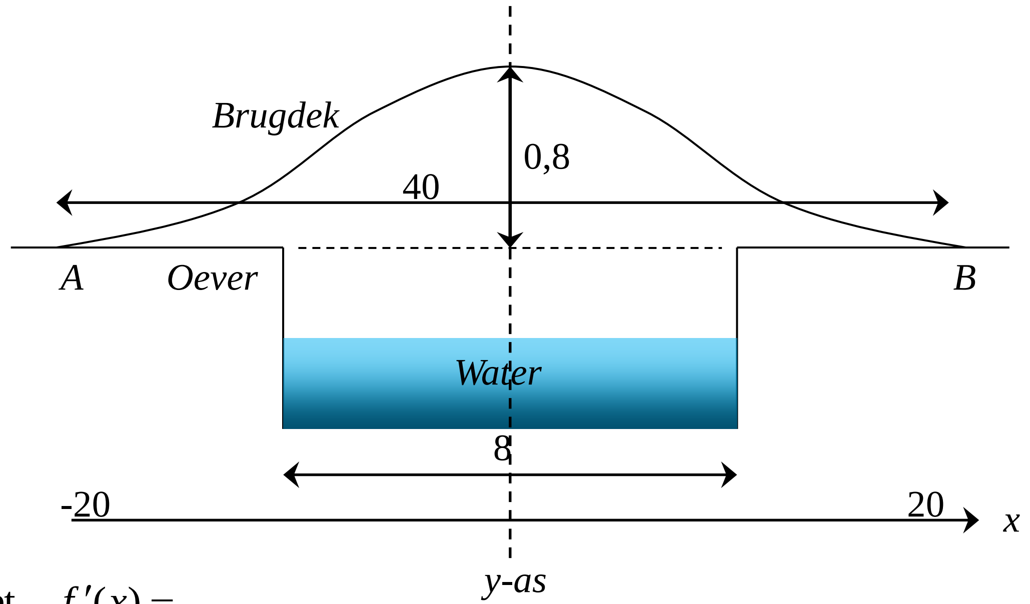


2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.

$$f(x) = 0,40(1 + \cos(\frac{\pi}{20}x))$$

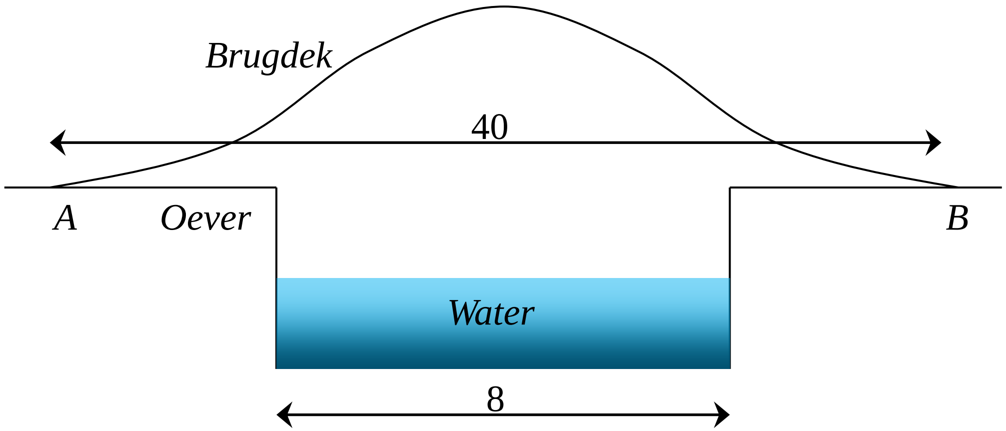
Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.



booglengte: $\int_{-20}^{20} \sqrt{(1 + \{f'(x)\}^2} \, dx$ met $f'(x) =$

2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.



$$f(x) = 0,40(1 + \cos(\frac{\pi}{20}x))$$

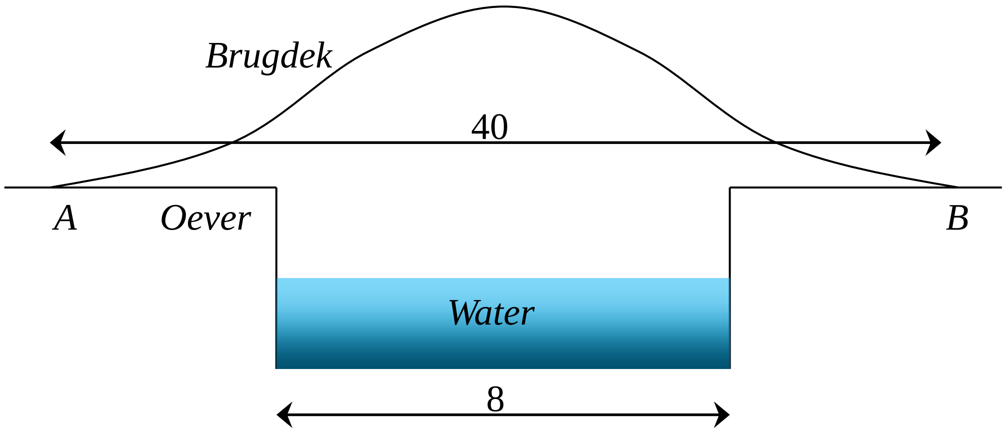
Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.

booglengte: $\int_{-20}^{20} \sqrt{(1 + \{f'(x)\}^2} \, dx$ met $f'(x) = 0,40 \cdot -\sin(\frac{\pi}{20}x) \cdot \frac{\pi}{20} = -0,02\pi \sin(\pi x / 20)$

Stop dit in de GR, bijv.:

2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.



$$f(x) = 0,40(1+\cos(\frac{\pi}{20}x))$$

Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.

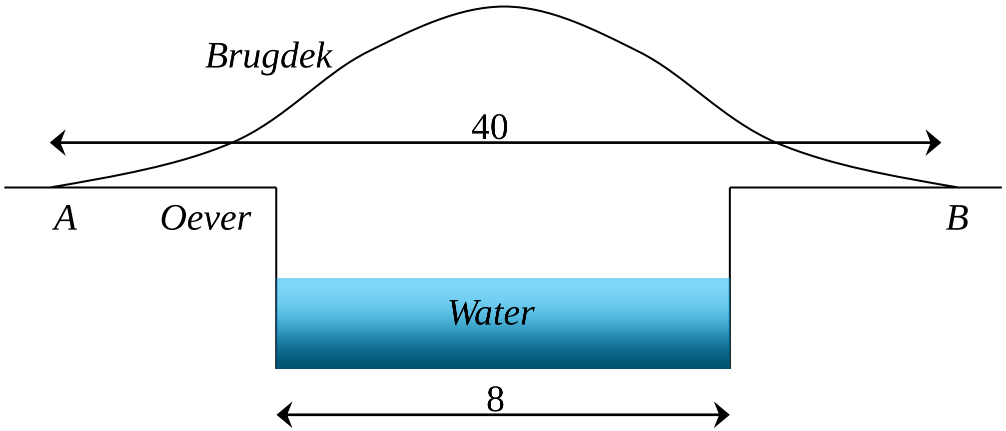
booglengte: $\int_{-20}^{20}\sqrt{(1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ met $f'(x) = 0,40\cdot -\sin(\frac{\pi}{20}x)\cdot\frac{\pi}{20} = -0,02\pi\sin(\pi x/20)$

Stop dit in de GR, bijv.: fnInt(√ (1 + (-0.2 π sin(πX/20))2), X, -20, 20)

Antwoord:

2011-II Goniometrie

De gegevens zijn veranderd:
AB = 40 m. Zie de figuur.



$$f(x) = 0,40(1 + \cos(\frac{\pi}{20}x))$$

Vraag 9. Bereken de lengte van het brugdek met deze gegevens.
De GR mag (dus) gebruikt worden.

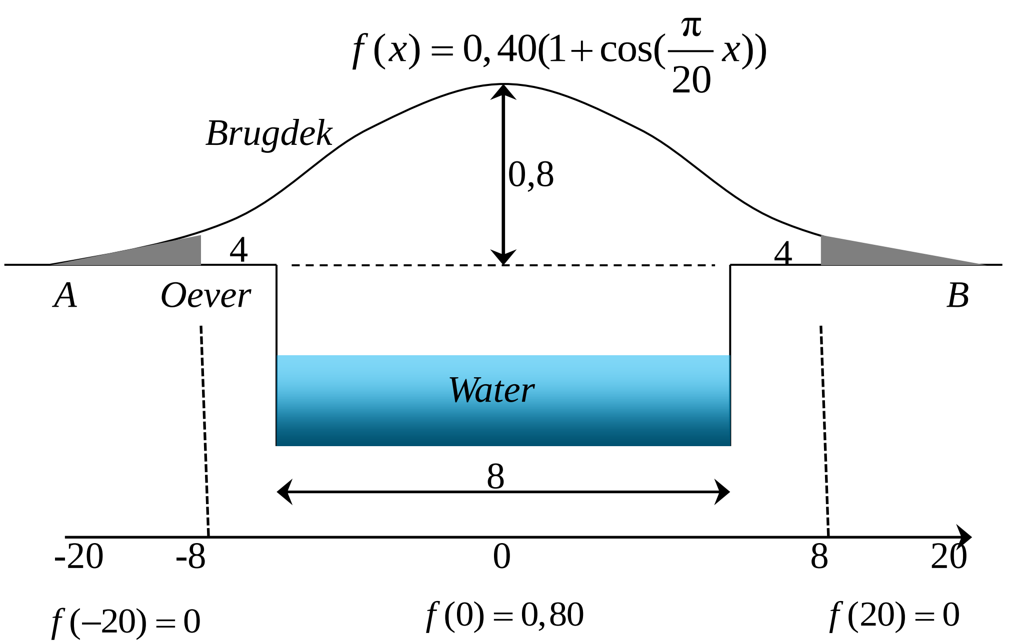
booglengte: $\int_{-20}^{20} \sqrt{(1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$ met $f'(x) = 0,40 \cdot -\sin(\frac{\pi}{20}x) \cdot \frac{\pi}{20} = -0,02\pi \sin(\pi x / 20)$

Stop dit in de GR, bijv.: fnInt(√ (1 + (-0.2 π sin(πX/20))2), X, -20, 20)

Antwoord: 40.039 afgerond 40.04 m = 4004 cm.

2011-II Goniometrie

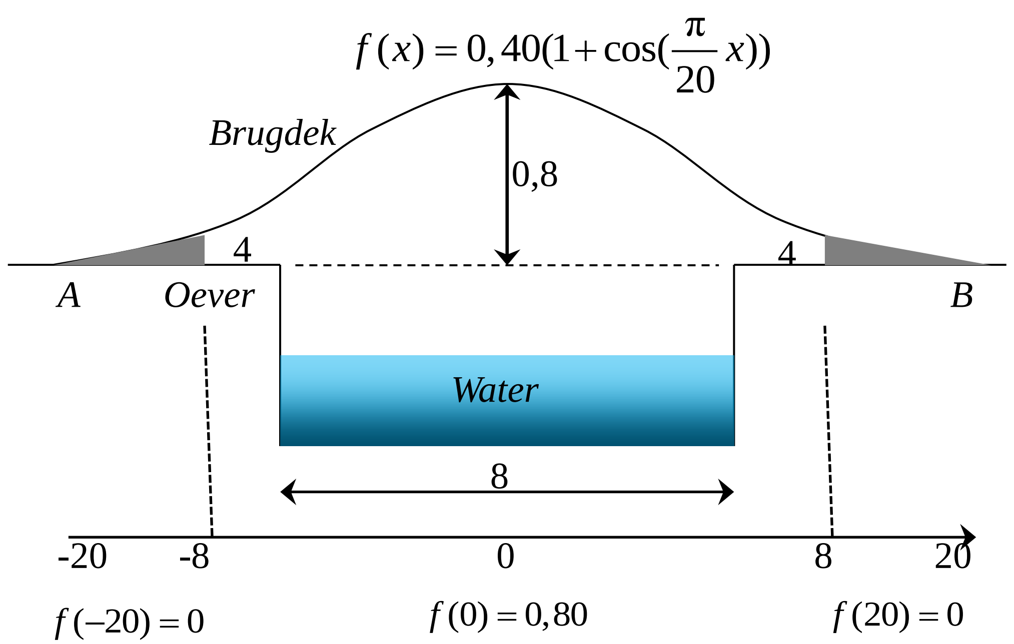
Het brugdek wordt 3,50 m breed. De uiteinden van de brug wil men ondersteunen door aan beide zijden, over de hele breedte van het brugdek, beton te storten. De betonnen gedeelten (met verticale wanden) beginnen op een afstand van 4,00 meter vanaf de rand van de vijver. In de tekening grijs gemaakt.



Vraag 10. Bereken hoeveel kubieke meter beton voor de betonnen ondersteuning nodig is.
De inhoud is 2 × 3,50 × de opp. onder de grafiek (het grijze stuk)

2011-II Goniometrie

Het brugdek wordt 3,50 m breed. De uiteinden van de brug wil men ondersteunen door aan beide zijden, over de hele breedte van het brugdek, beton te storten. De betonnen gedeelten (met verticale wanden) beginnen op een afstand van 4,00 meter vanaf de rand van de vijver. In de tekening grijs gemaakt.

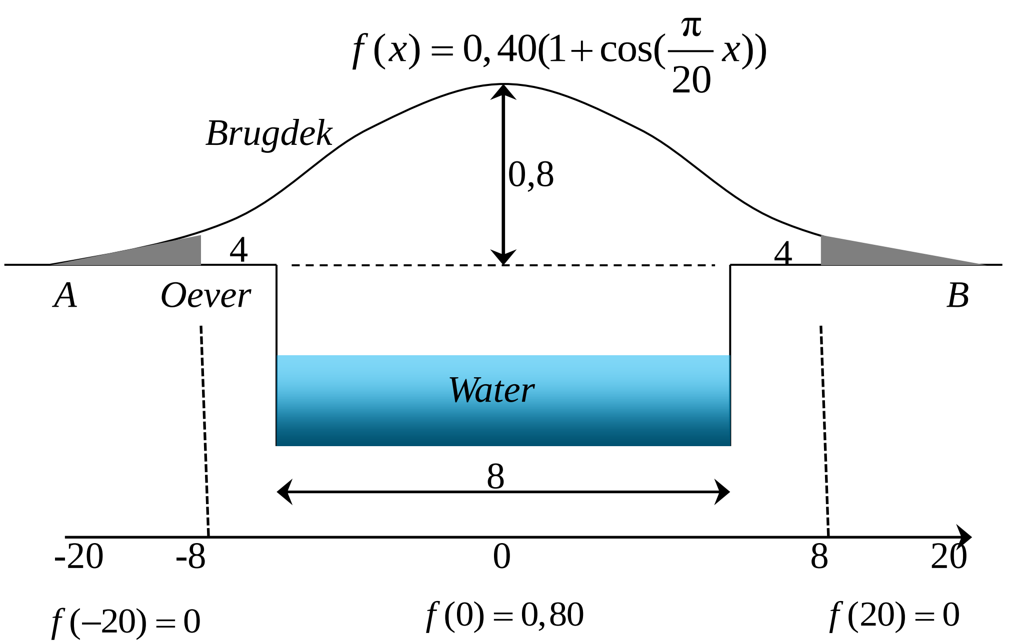


Vraag 10. Bereken hoeveel kubieke meter beton voor de betonnen ondersteuning nodig is.
De inhoud is 2 × 3,50 × de opp. onder de grafiek (het grijze stuk)

De grijze opp. is een integraal, namelijk: $\int_{8}^{20} f(x)\, dx$

2011-II   Goniometrie

Het brugdek wordt 3,50 m breed. De uiteinden van de brug wil men ondersteunen door aan beide zijden, over de hele breedte van het brugdek, beton te storten. De betonnen gedeelten (met verticale wanden) beginnen op een afstand van 4,00 meter vanaf de rand van de vijver. In de tekening grijs gemaakt.



Vraag 10. Bereken hoeveel kubieke meter beton voor de betonnen ondersteuning nodig is.
De inhoud is 2 × 3,50 × de opp. onder de grafiek (het grijze stuk)

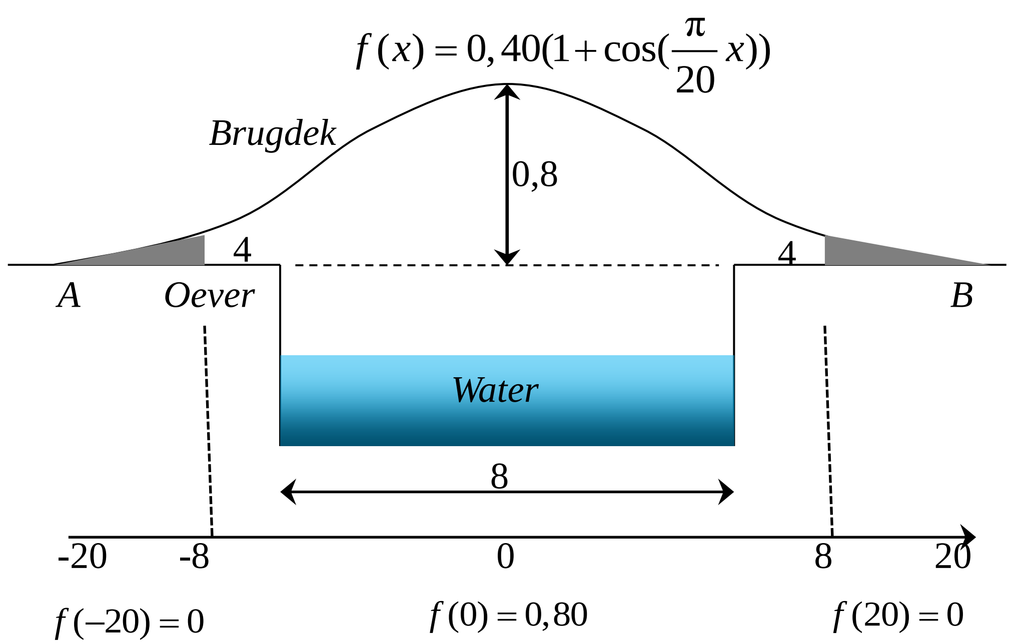
De grijze opp. is een integraal, namelijk: $\int_8^{20} f(x)\,dx$

Met de GR bijv.: fnInt (0.4(1+cos(πX/20)), X, 8, 20) = 2.378

Het volume aan beton is dan:

2011-II Goniometrie

Het brugdek wordt 3,50 m breed. De uiteinden van de brug wil men ondersteunen door aan beide zijden, over de hele breedte van het brugdek, beton te storten. De betonnen gedeelten (met verticale wanden) beginnen op een afstand van 4,00 meter vanaf de rand van de vijver. In de tekening grijs gemaakt.



Vraag 10. Bereken hoeveel kubieke meter beton voor de betonnen ondersteuning nodig is.
De inhoud is 2 × 3,50 × de opp. onder de grafiek (het grijze stuk)

De grijze opp. is een integraal, namelijk: $\int_{8}^{20} f(x)\,dx$

Met de GR bijv.: fnInt (0.4(1+cos(πX/20)), X, 8, 20) = 2.378

Het volume aan beton is dan: 2 × 3,50 × 2.378 = 16.65 (m^3)

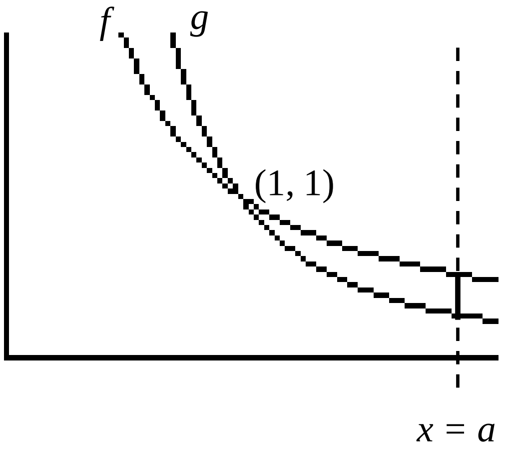
2011-II Lijnstukken in grafieken

De grafieken van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

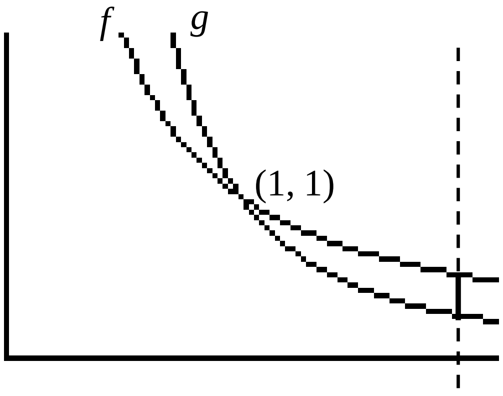
De lijn $x = a$ met $a > 1$ snijdt deze grafieken.

Vraag 11. Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarden van a de lengte van het verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

De lengte is $f(a) - g(a) =$



2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

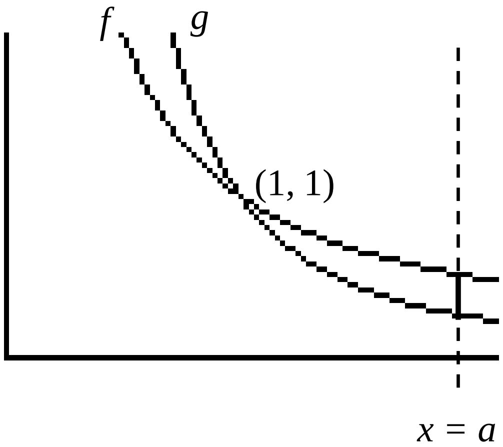
De lijn $x = a$ met $a > 1$ snijdt deze grafieken.

Vraag 11. Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarden van a de lengte van het verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

De lengte is $f(a) - g(a) =$ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$

Links en rechts $\times\, a^2$ geeft:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $x = a$ met $a > 1$ snijdt deze grafieken.

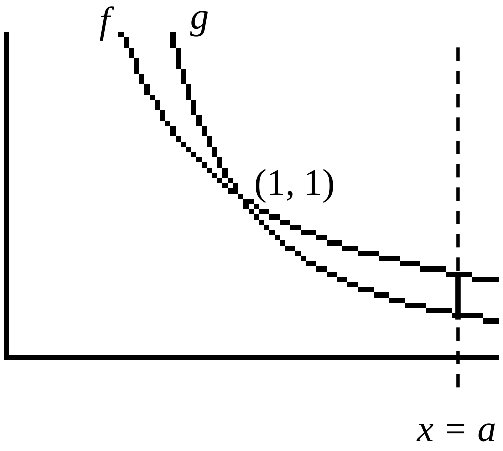
Vraag 11. Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarden van a de lengte van het verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

De lengte is $f(a) - g(a) =$ $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$

Links en rechts $\times\, a^2$ geeft: $a - 1 = \frac{a^2}{6}$

Links en rechts $\times\, 6$ geeft:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $x = a$ met $a > 1$ snijdt deze grafieken.

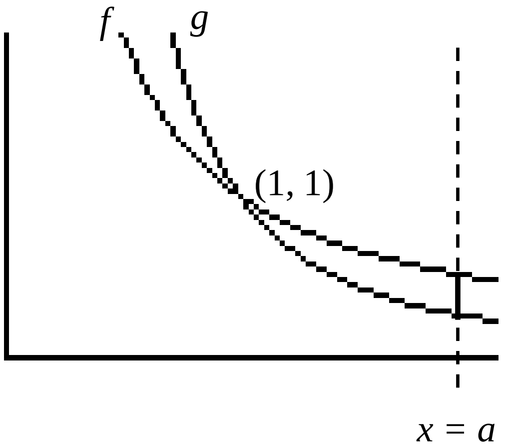
Vraag 11. Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarden van a de lengte van het verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

De lengte is $f(a) - g(a) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{6}$

Links en rechts $\times\, a^2$ geeft: $a - 1 = \dfrac{a^2}{6}$

Links en rechts $\times\, 6$ geeft: $6a - 6 = a^2$ dus $a^2 - 6a + 6 = 0$

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $x = a$ met $a > 1$ snijdt deze grafieken.

Vraag 11. Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarden van a de lengte van het verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

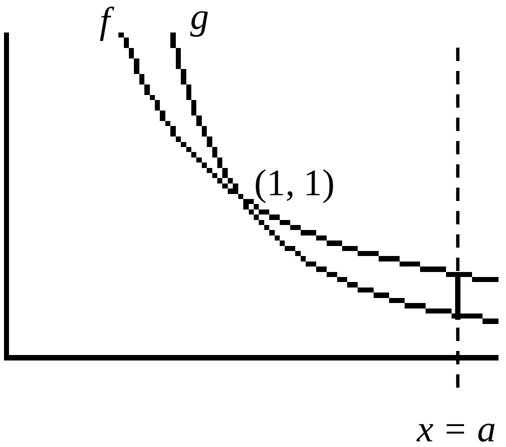
De lengte is $f(a) - g(a) = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{6}$

Links en rechts $\times\, a^2$ geeft: $a - 1 = \dfrac{a^2}{6}$

Links en rechts $\times\, 6$ geeft: $6a - 6 = a^2$ dus $a^2 - 6a + 6 = 0$

abc-formule geeft:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $x = a$ met $a > 1$ snijdt deze grafieken.

Vraag 11. Bereken op algebraïsche wijze voor welke waarden van a de lengte van het verbindingslijnstuk $\frac{1}{6}$ is.

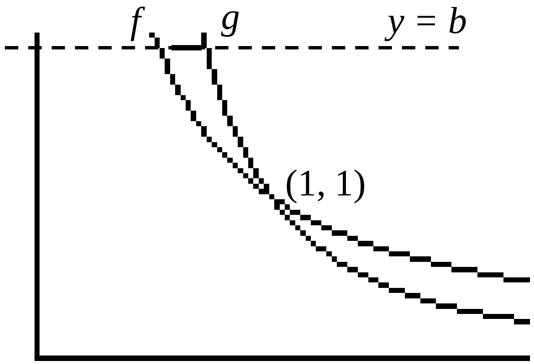
De lengte is $f(a) - g(a) = \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{6}$

Links en rechts $\times\, a^2$ geeft: $\quad a - 1 = \frac{a^2}{6}$

Links en rechts $\times$ 6 geeft: $\quad 6a - 6 = a^2 \quad$ dus $\quad a^2 - 6a + 6 = 0$

abc-formule geeft: $\quad a = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

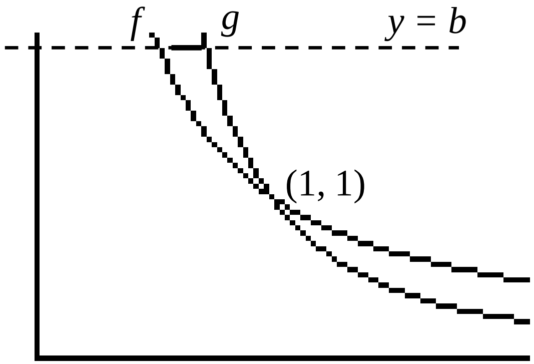
De lijn $y = b$ met $b > 1$ snijdt de grafieken volgens een

horizontaal verbindingslijnstuk met eindpunten $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Vraag 12. Bereken via differentiëren de maximale lengte van dat horizontale lijnstuk.

De lengte is: $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$, met gebroken exponenten:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $y = b$ met $b > 1$ snijdt de grafieken volgens een

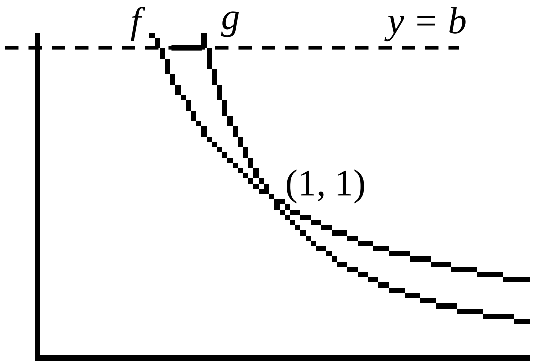
horizontaal verbindingslijnstuk met eindpunten $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Vraag 12. Bereken via differentiëren de maximale lengte van dat horizontale lijnstuk.

De lengte is: $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$, met gebroken exponenten: $b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$

Differentiëren en nulstellen geeft:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $y = b$ met $b > 1$ snijdt de grafieken volgens een

horizontaal verbindingslijnstuk met eindpunten $\dfrac{1}{b}$ en $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

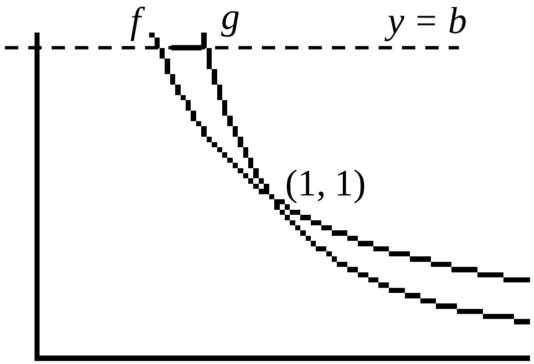
Vraag 12. Bereken via differentiëren de maximale lengte van dat horizontale lijnstuk.

De lengte is: $\dfrac{1}{\sqrt{b}} - \dfrac{1}{b}$, met gebroken exponenten: $b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$

Differentiëren en nulstellen geeft: $-\frac{1}{2}b^{-1\frac{1}{2}} + b^{-2} = 0$

Links en rechts $\times\ 2b^2$ geeft:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $y = b$ met $b > 1$ snijdt de grafieken volgens een

horizontaal verbindingslijnstuk met eindpunten $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Vraag 12. Bereken via differentiëren de maximale lengte van dat horizontale lijnstuk.

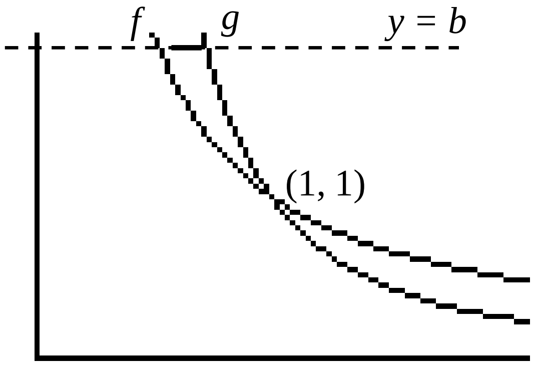
De lengte is: $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$, met gebroken exponenten: $b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$

Differentiëren en nulstellen geeft: $-\frac{1}{2} b^{-1\frac{1}{2}} + b^{-2} = 0$

Links en rechts × $2b^2$ geeft: $-\frac{1}{2} \cdot 2b^2 \cdot b^{-1\frac{1}{2}} + 2b^2 \cdot b^{-2} = -b^{\frac{1}{2}} + 2b^0 = -\sqrt{b} + 2 = 0$

Met de oplossing:

2011-II Lijnstukken in grafieken



De grafieken van $f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ snijden elkaar in (1, 1).

De lijn $y = b$ met $b > 1$ snijdt de grafieken volgens een

horizontaal verbindingslijnstuk met eindpunten $\frac{1}{b}$ en $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Vraag 12. Bereken via differentiëren de maximale lengte van dat horizontale lijnstuk.

De lengte is: $\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{b}$, met gebroken exponenten: $b^{-\frac{1}{2}} - b^{-1}$

Differentiëren en nulstellen geeft: $-\frac{1}{2} b^{-1\frac{1}{2}} + b^{-2} = 0$

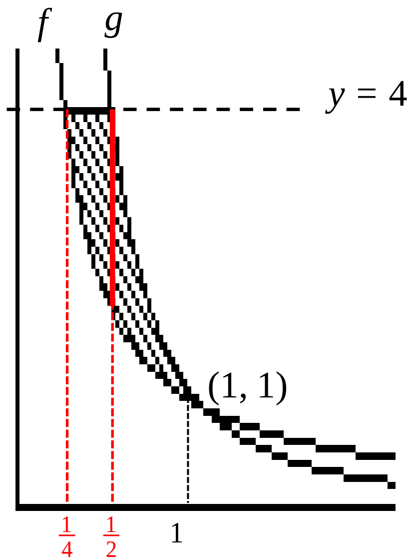
Links en rechts × $2b^2$ geeft: $-\frac{1}{2} \cdot 2b^2 \cdot b^{-1\frac{1}{2}} + 2b^2 \cdot b^{-2} = -b^{\frac{1}{2}} + 2b^0 = -\sqrt{b} + 2 = 0$

Met de oplossing: $\sqrt{b} = 2$ dus $b = 4$

2011-II Lijnstukken in grafieken

V is het vlakdeel, ingesloten door de grafieken van

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en de lijn $y = 4$.



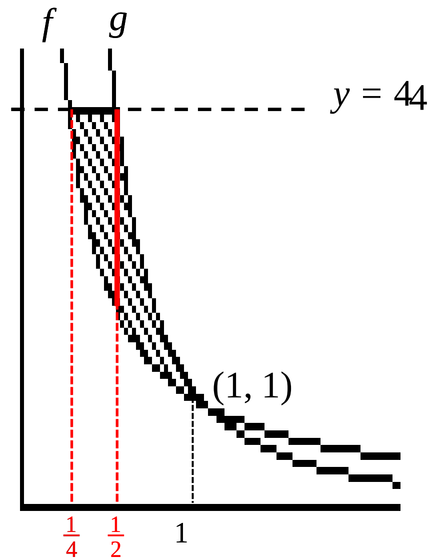
Vraag 13. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Bereken eerst de snijpunten met $y = 4$:

2011-II Lijnstukken in grafieken

V is het vlakdeel, ingesloten door de grafieken van

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en de lijn $y = 4$.

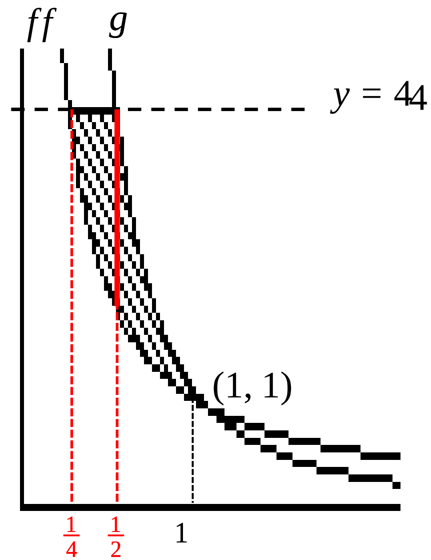


Vraag 13. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Bereken eerst de snijpunten met $y = 4$: $\frac{1}{x} = 4$ geeft $x = 0,25$ en $\frac{1}{x^2} = 4$ geeft $x = 0,5$

Twee integralen:

2011-II Lijnstukken in grafieken



V is het vlakdeel, ingesloten door de grafieken van

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en de lijn $y = 4$.

Vraag 13. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Bereken eerst de snijpunten met $y = 4$: $\frac{1}{x} = 4$ geeft $x = 0{,}25$ en $\frac{1}{x^2} = 4$ geeft $x = 0{,}5$

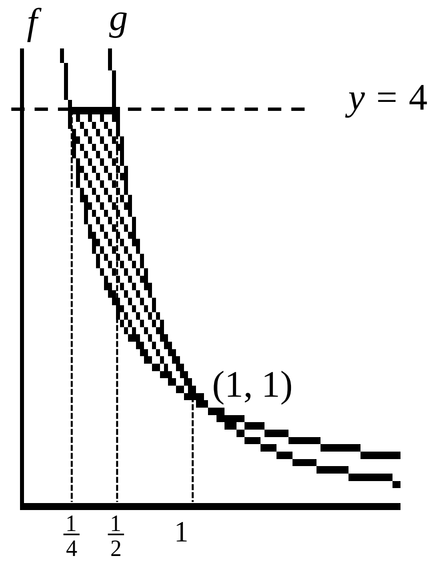
Twee integralen: $\int_{0,25}^{0,5} (4 - \frac{1}{x})\,dx + \int_{0,5}^{1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})\,dx$

Primitiveren:

2011-II Lijnstukken in grafieken

V is het vlakdeel, ingesloten door de grafieken van

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en de lijn $y = 4$.



Vraag 13. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Bereken eerst de snijpunten met $y = 4$: $\frac{1}{x} = 4$ geeft $x = 0,25$ en $\frac{1}{x^2} = 4$ geeft $x = 0,5$

Twee integralen: $\int_{0,25}^{0,5} (4 - \frac{1}{x})\,dx + \int_{0,5}^{1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})\,dx$

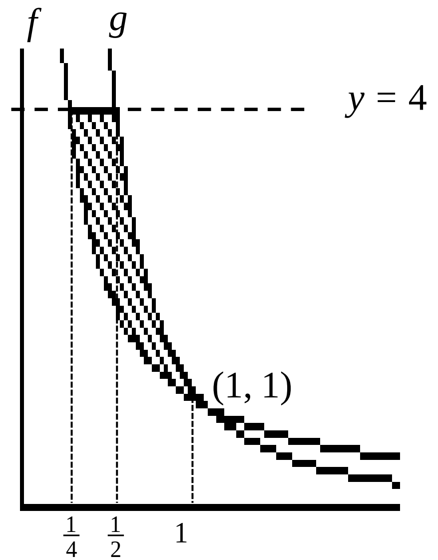
Primitiveren: $\left[4x - \ln x\right]_{0,25}^{0,5} + \left[-\frac{1}{x} - \ln x\right]_{0,5}^{1}$

Uitwerken:

2011-II Lijnstukken in grafieken

V is het vlakdeel, ingesloten door de grafieken van

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en de lijn $y = 4$.



Vraag 13. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Bereken eerst de snijpunten met y =4: $\frac{1}{x} = 4$ geeft $x = 0,25$ en $\frac{1}{x^2} = 4$ geeft $x = 0,5$

Twee integralen: $\int_{0,25}^{0,5} (4 - \frac{1}{x})\,dx + \int_{0,5}^{1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})\,dx$

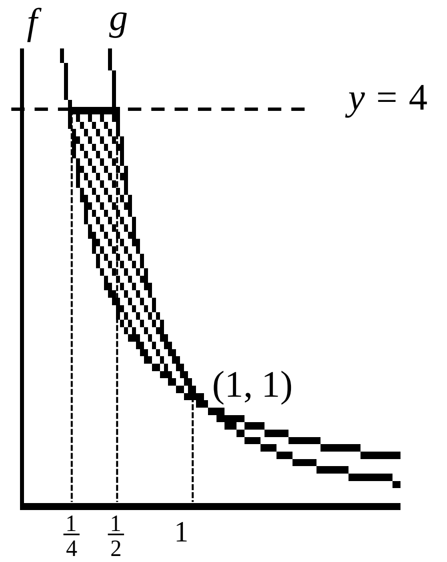
Primitiveren: $\left[4x - \ln x\right]_{0,25}^{0,5} + \left[-\frac{1}{x} - \ln x\right]_{0,5}^{1}$

Uitwerken: $[2 - \ln\frac{1}{2} - (1 - \ln\frac{1}{4})] + [(-1 - \ln 1) - (-2 - \ln\frac{1}{2})]$ $= 2 + \ln\frac{1}{4}$ $[= 2 - \ln 4]$

2011-II Lijnstukken in grafieken

V is het vlakdeel, ingesloten door de grafieken van

$f(x) = \frac{1}{x}$ en $g(x) = \frac{1}{x^2}$ en de lijn $y = 4$.



Vraag 13. Bereken exact de oppervlakte van V. Schrijf je antwoord zo eenvoudig mogelijk.

Bereken eerst de snijpunten met $y = 4$: $\frac{1}{x} = 4$ geeft $x = 0{,}25$ en $\frac{1}{x^2} = 4$ geeft $x = 0{,}5$

Twee integralen: $\int_{0,25}^{0,5} (4 - \frac{1}{x})\,dx + \int_{0,5}^{1} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})\,dx$

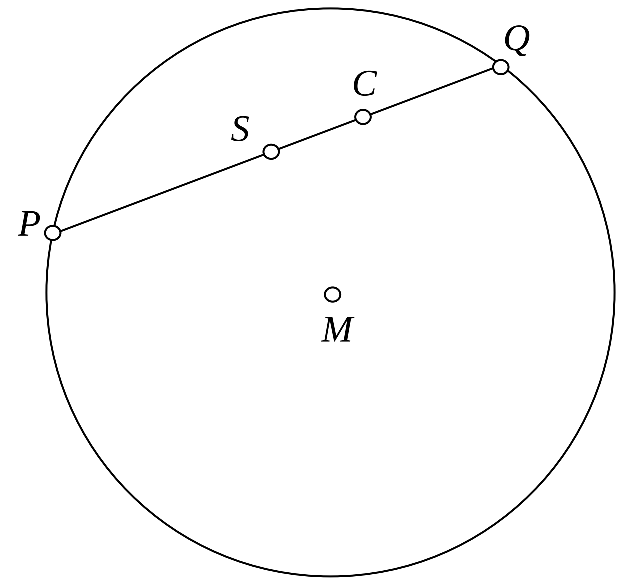
Primitiveren: $\left[4x - \ln x\right]_{0,25}^{0,5} + \left[-\frac{1}{x} - \ln x\right]_{0,5}^{1}$

$\ln \frac{1}{4} = \ln 4^{-1} = -\ln 4$

Uitwerken: $[2 - \ln\frac{1}{2} - (1 - \ln\frac{1}{4})] + [(-1 - \ln 1) - (-2 - \ln\frac{1}{2})]$ $= 2 + \ln\frac{1}{4}$ $[= 2 - \ln 4]$

2011-II Midden van een koorde

Gegeven is een cirkel met middelpunt M. Punt C ligt binnen de cirkel. PQ is een koorde door C die niet door M gaat. Het midden van PQ is S.



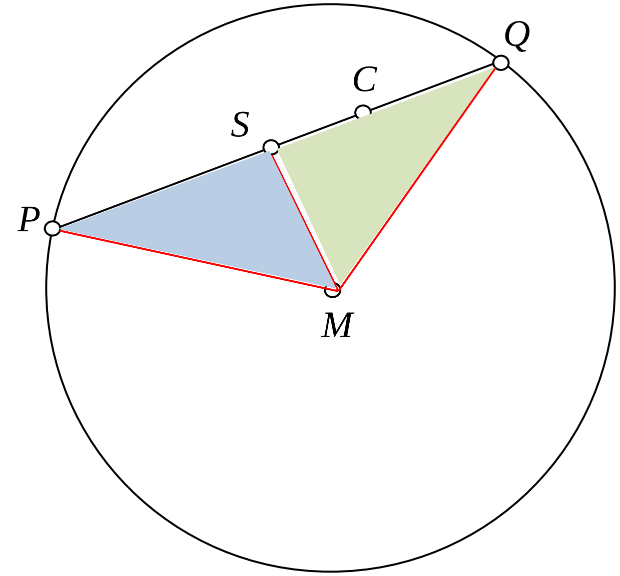
Vraag 14.
Bewijs dat S op de cirkel met middellijn MC ligt.

Bewijs:

$\Delta\, MSP \cong \Delta\, MSQ$ want:

2011-II   Midden van een koorde

Gegeven is een cirkel met middelpunt *M*. Punt *C* ligt binnen de cirkel. *PQ* is een koorde door *C* die niet door *M* gaat. Het midden van *PQ* is *S*.

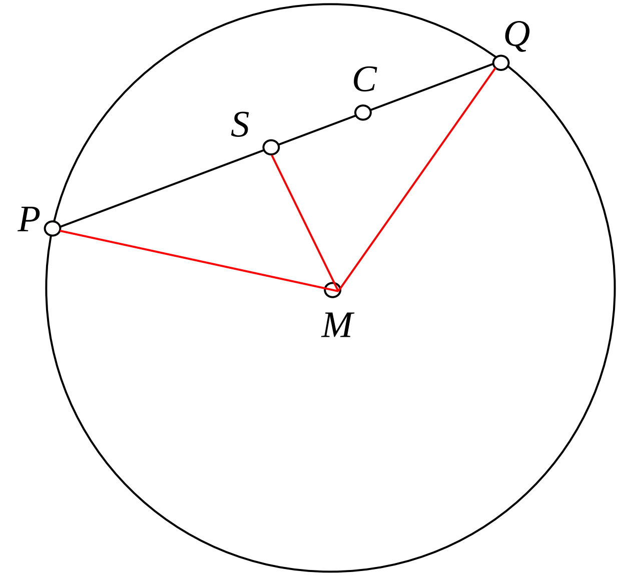


Vraag 14.
Bewijs dat *S* op de cirkel met middellijn *MC* ligt.

Bewijs:

$\Delta\, MSP \cong \Delta\, MSQ$ want:

2011-II Midden van een koorde



Gegeven is een cirkel met middelpunt *M*. Punt *C* ligt binnen de cirkel. *PQ* is een koorde door *C* die niet door *M* gaat. Het midden van *PQ* is *S*.

Vraag 14.
Bewijs dat *S* op de cirkel met middellijn *MC* ligt.

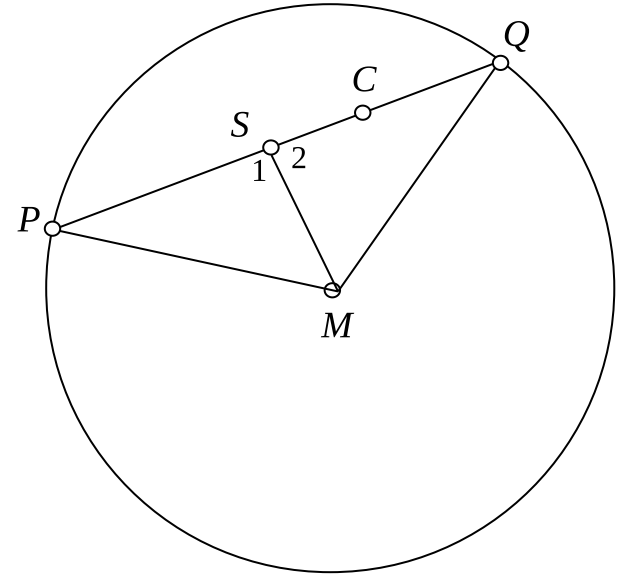
Bewijs:

$\Delta\, MSP \cong \Delta\, MSQ$ want:

SM = SM *SP = SQ* (*midden*) *MP = MQ* (*straal cirkel*) *geval ZZZ*

2011-II   Midden van een koorde

Gegeven is een cirkel met middelpunt M. Punt C ligt binnen de cirkel. PQ is een koorde door C die niet door M gaat. Het midden van PQ is S.



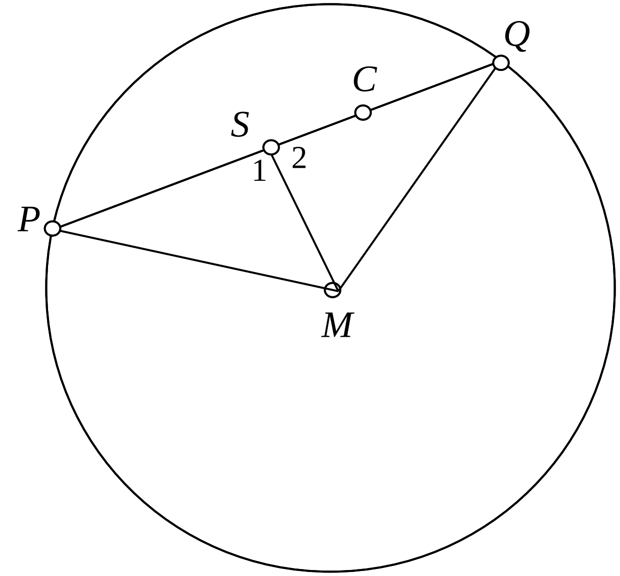
Vraag 14.
Bewijs dat S op de cirkel met middellijn MC ligt.

Bewijs:

$\Delta\, MSP \cong \Delta\, MSQ$ want:
$SM = SM$ $SP = SQ$ (*midden*) $MP = MQ$ (*straal cirkel*)   *geval ZZZ*

$\angle S_1 = \angle S_2 = 90^o$ want:

2011-II   Midden van een koorde



Gegeven is een cirkel met middelpunt M. Punt C ligt binnen de cirkel. PQ is een koorde door C die niet door M gaat. Het midden van PQ is S.

Vraag 14.
Bewijs dat S op de cirkel met middellijn MC ligt.

Bewijs:

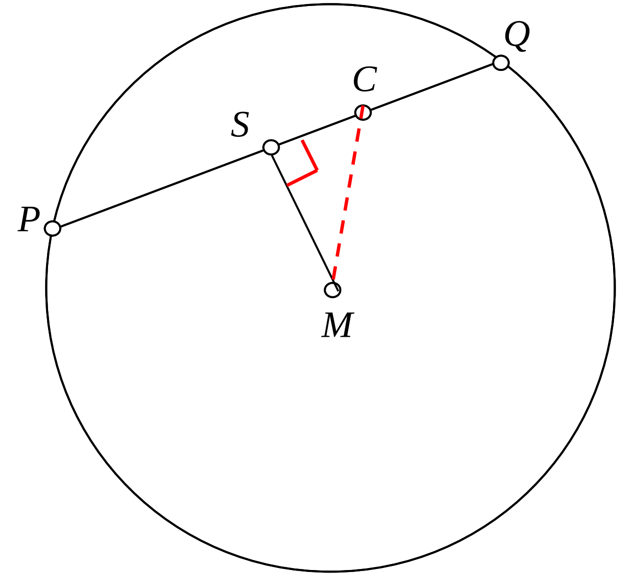
$\Delta\, MSP \cong \Delta\, MSQ$ want:
$SM = SM$ $SP = SQ$ (*midden*) $MP = MQ$ (*straal cirkel*)   *geval ZZZ*

$\angle S_1 = \angle S_2 = 90^o$ want:
$\angle S_1 = \angle S_2$ en $\angle S_1 + \angle S_2 = 180^o$ dus $\angle S_1 = \angle S_2 = 90^o$.

Hieruit volgt:

2011-II   Midden van een koorde

Gegeven is een cirkel met middelpunt M. Punt C ligt binnen de cirkel. PQ is een koorde door C die niet door M gaat. Het midden van PQ is S.



Vraag 14.
Bewijs dat S op de cirkel met middellijn MC ligt.

Bewijs:

$\Delta\, MSP \cong \Delta\, MSQ$ want:
$SM = SM$ $SP = SQ$ (*midden*) $MP = MQ$ (*straal cirkel*)   *geval ZZZ*

$\angle S_1 = \angle S_2 = 90^o$ want:
$\angle S_1 = \angle S_2$ en $\angle S_1 + \angle S_2 = 180^o$ dus $\angle S_1 = \angle S_2 = 90^o$.

Hieruit volgt: S ligt op de cirkel met middellijn MC (*Stelling van Thales*).

2011-II Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.

In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$

- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden

berekend met de formule: $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$

met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

Vraag 15. Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

Deze opgave bevat heel veel context. Het grootste deel is "ruis", heeft niets met wiskunde te maken. In het volgende scherm geef ik met rood aan, welke gegevens (letters, formules) je nodig hebt. Druk op PageDown of een pijltjestoets voor het volgende scherm.

2011-II Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.

In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$

- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden

berekend met de formule: $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$

met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

Vraag 15. Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

$$G(q) = \frac{T(q)}{q} =$$

2011-II Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.

In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$

- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden

berekend met de formule: $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$

met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

Vraag 15. Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

$G(q) = \dfrac{T(q)}{q} = 0,2q^2 - 1,2q + 4,2 + \dfrac{1}{q}$ en daarna: $G'(q) = 0$ geeft:

2011-II Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.

In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$

- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden

berekend met de formule: $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$

met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

Vraag 15. Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

$G(q) = \dfrac{T(q)}{q} = 0,2q^2 - 1,2q + 4,2 + \dfrac{1}{q}$ en daarna: $G'(q) = 0$ geeft: $0,4q - 1,2 - \dfrac{1}{q^2} = 0$

2011-II Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.

In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$

- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden

berekend met de formule: $T(q) = 0{,}2 \cdot q^3 - 1{,}2 \cdot q^2 + 4{,}2 \cdot q + 1$

met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

Vraag 15. Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

$G(q) = \dfrac{T(q)}{q} = 0{,}2q^2 - 1{,}2q + 4{,}2 + \dfrac{1}{q}$ en daarna: $G'(q) = 0$ geeft: $0{,}4q - 1{,}2 - \dfrac{1}{q^2} = 0$

Met de GR (bijv. intersect) komt er uit:

2011-II Kostenfuncties

In de economie onderscheidt men de volgende kosten bij de productie van een hoeveelheid q van een bepaald product:

- de totale kosten $T(q)$.
- de marginale kosten $M(q)$, die benaderd kunnen worden door $T'(q)$.

In deze opgave geldt: $M(q) = T'(q)$

- de gemiddelde kosten $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$

Voor een bepaald product kunnen de totale kosten van de productie worden

berekend met de formule: $T(q) = 0,2 \cdot q^3 - 1,2 \cdot q^2 + 4,2 \cdot q + 1$

met q de geproduceerde hoeveelheid in duizendtallen en $T(q)$ de totale kosten in duizenden euro's.

Vraag 15. Bereken met behulp van differentiëren bij welke productiehoeveelheid q de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn.

$G(q) = \dfrac{T(q)}{q} = 0,2q^2 - 1,2q + 4,2 + \dfrac{1}{q}$ en daarna: $G'(q) = 0$ geeft: $0,4q - 1,2 - \dfrac{1}{q^2} = 0$

Met de GR (bijv. intersect) komt er uit: $q \approx 3,24$

2011-II Kostenfuncties

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q)$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden:

$$T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Vraag 16. Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

$$M(q) = T'(q) =$$

2011-II Kostenfuncties

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q)$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden:

$$T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Vraag 16. Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

$M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ moet minimaal zijn dus:

2011-II Kostenfuncties

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q)$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden:

$$T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Vraag 16. Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

$M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ moet minimaal zijn dus:

De afgeleide van $M(q)$ dus $T''(q)$ moet 0 gesteld worden:

$M'(q) =$

2011-II Kostenfuncties

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q)$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden:

$$T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Vraag 16. Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

$M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ moet minimaal zijn dus:

De afgeleide van $M(q)$ dus $T''(q)$ moet 0 gesteld worden:

$M'(q) = 6a \cdot q + 2b = 0$ geeft $b =$

2011-II   Kostenfuncties

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q)$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden:

$$T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Vraag 16. Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

$M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ moet minimaal zijn dus:

De afgeleide van $M(q)$ dus $T''(q)$ moet 0 gesteld worden:

$M'(q) = 6a \cdot q + 2b = 0$ geeft $b = -3a \cdot q$

$a > 0$ en $q > 0$ dus:

2011-II Kostenfuncties

In het algemeen geldt dat de totale kosten $T(q)$ eerst afnemend stijgend en vervolgens toenemend stijgend zijn. Omdat derdegraadsfuncties T met $T(q)$ zich onder bepaalde voorwaarden voor a, b, c en d op deze manier gedragen, worden deze vaak gebruikt om de totale kosten te beschrijven. Voor een bruikbare derdegraadsfunctie T moet gelden:

$$T(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

Een voorwaarde voor b kan worden gevonden door te bedenken dat de marginale kosten $M(q) = T'(q)$ eerst afnemen en vervolgens toenemen. Dan moet er dus een productiehoeveelheid q zijn waarbij de marginale kosten $M(q)$ minimaal zijn.

Vraag 16. Toon aan dat hieruit volgt dat $b < 0$.

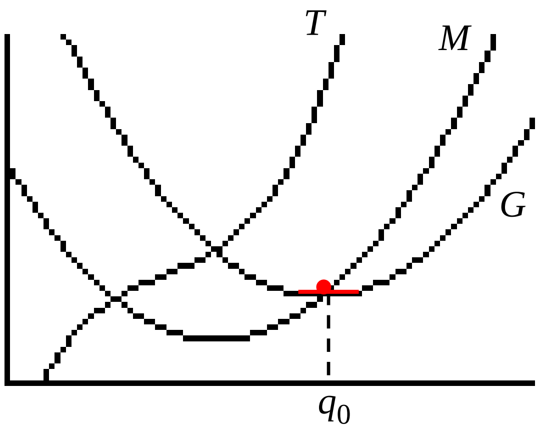
$M(q) = T'(q) = 3a \cdot q^2 + 2b \cdot q + c$ moet minimaal zijn dus:

De afgeleide van $M(q)$ dus $T''(q)$ moet 0 gesteld worden:

$M'(q) = 6a \cdot q + 2b = 0$ geeft $b = -3a \cdot q$

$a > 0$ en $q > 0$ dus: $b < 0$.

2011-II Kostenfuncties



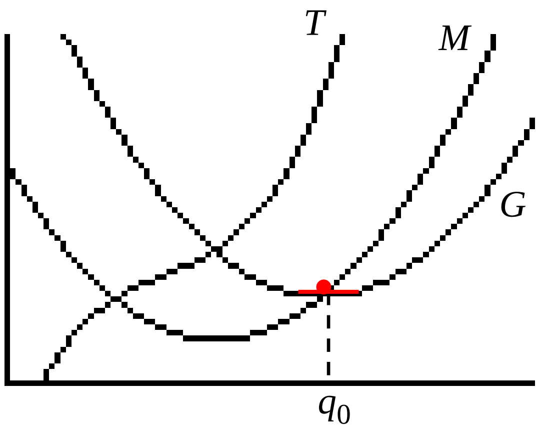
Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

Markeer de begrippen die belangrijk zijn voor het beantwoorden van deze vraag.

2011-II   Kostenfuncties

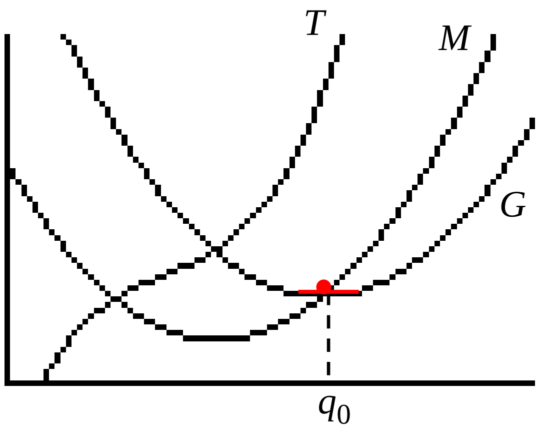


Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

2011-II Kostenfuncties



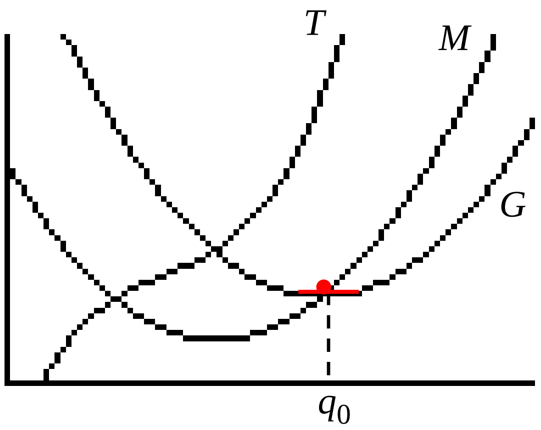
Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

Gebruik de quotiëntregel.

2011-II Kostenfuncties



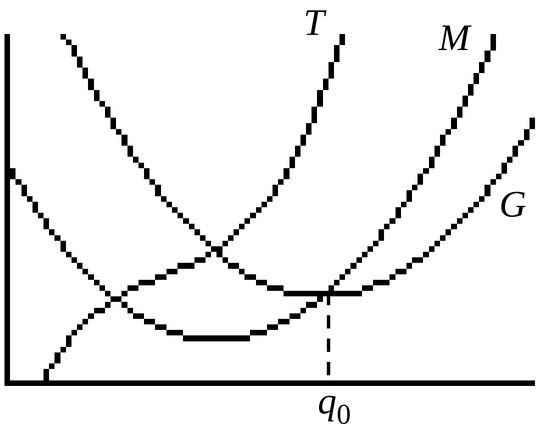
Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0)= 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

Gebruik de quotiëntregel: $G'(q) = ...$

2011-II Kostenfuncties



Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde

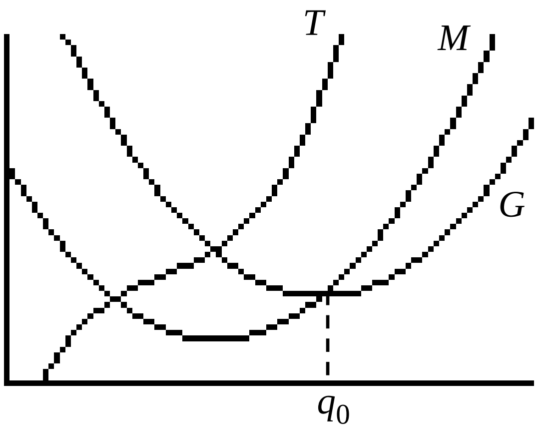
kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

Gebruik de quotiëntregel: $G'(q) = \dfrac{T' \cdot q - T \cdot 1}{q^2}$ dus $G'(q_0) = \dfrac{T' \cdot q_0 - T}{{q_0}^2} = 0$

2011-II Kostenfuncties



Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

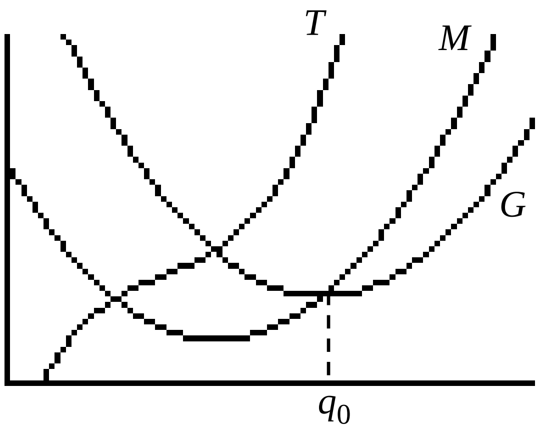
Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

Gebruik de quotiëntregel: $G'(q) = \dfrac{T' \cdot q - T \cdot 1}{q^2}$ dus $G'(q_0) = \dfrac{T' \cdot q_0 - T}{{q_0}^2} = 0$

$T'(q_0) - T(q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow$

2011-II Kostenfuncties



Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.

Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0) = 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

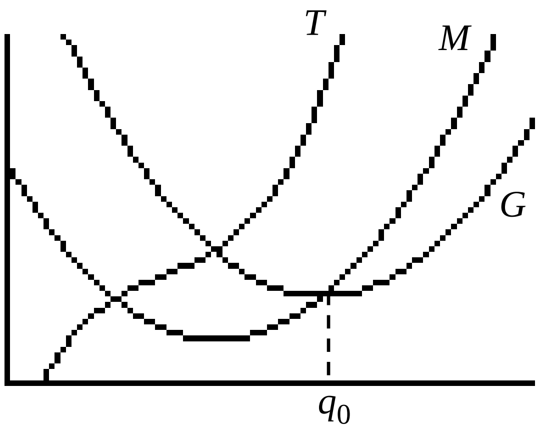
Gebruik de quotiëntregel: $G'(q) = \dfrac{T' \cdot q - T \cdot 1}{q^2}$ dus $G'(q_0) = \dfrac{T' \cdot q_0 - T}{{q_0}^2} = 0$

$T'(q_0) - T(q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T'(q_0) = \dfrac{T(q_0)}{q_0}$ dus

2011-II Kostenfuncties

Hiernaast is de grafiek van een willekeurige kostenfunctie T getekend. De functie T hoeft niet een derdegraadsfunctie te zijn. De grafiek van T is een vloeiende kromme en vertoont dus geen knikken. Ook zijn de grafieken getekend van de marginale kostenfunctie M met $M(q) = T'(q)$ en de gemiddelde

kostenfunctie G met $G(q) = \dfrac{T(q)}{q}$.



Verder is in de figuur aangegeven dat voor $q = q_0$ de gemiddelde kosten $G(q)$ minimaal zijn. Dit betekent dat geldt: $G'(q_0)= 0$. Het lijkt of de grafieken van G en M elkaar voor $q = q_0$ snijden. In economieboeken wordt inderdaad beweerd dat voor $q = q_0$ de marginale kosten $M(q)$ en de gemiddelde kosten $G(q)$ aan elkaar gelijk zijn.

Vraag 17. Toon op algebraïsche wijze aan dat uit $G'(q_0) = 0$ volgt dat deze bewering waar is.

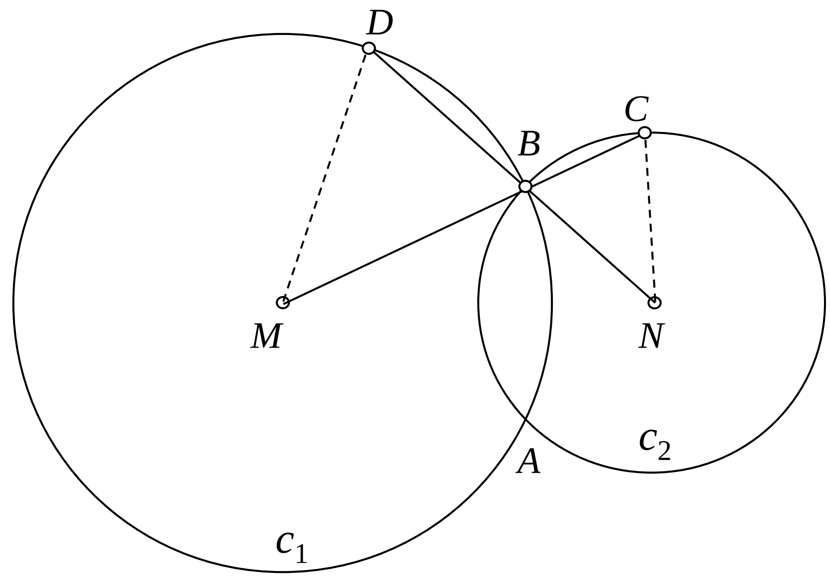
Gebruik de quotiëntregel: $G'(q) = \dfrac{T' \cdot q - T \cdot 1}{q^2}$ dus $G'(q_0) = \dfrac{T' \cdot q_0 - T}{q_0{}^2} = 0$

$T'(q_0) - T(q_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T'(q_0) = \dfrac{T(q_0)}{q_0}$ dus $M(q_0) = G(q_0)$

Dus voor $q = q_0$ zijn M en G gelijk aan elkaar (snijpunt in de grafiek).

2011-II Snijdende cirkels

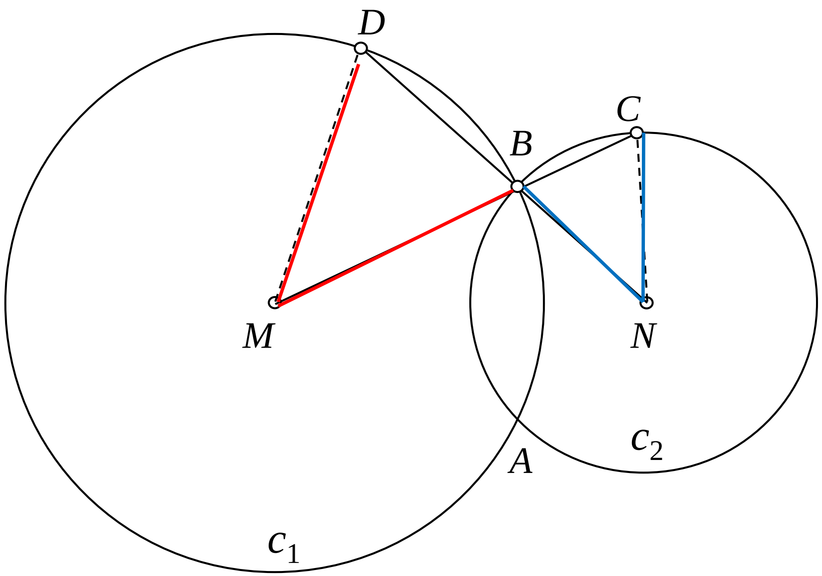
Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D. Zie de figuur.



Vraag 18. Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

Bewijs:

2011-II Snijdende cirkels



Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D. Zie de figuur.

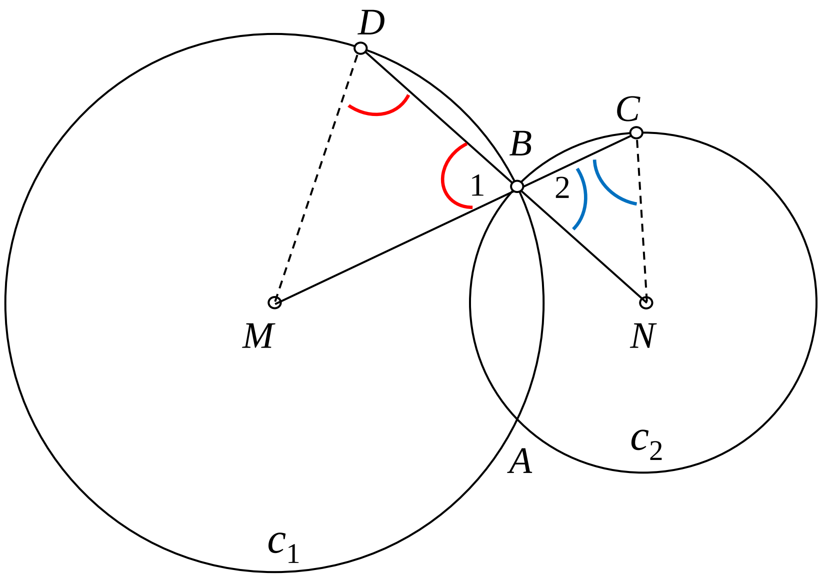
Vraag 18. Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

Bewijs:

$MB = MD$ en $NB = NC$ (*cirkels*)

2011-II Snijdende cirkels

Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D. Zie de figuur.



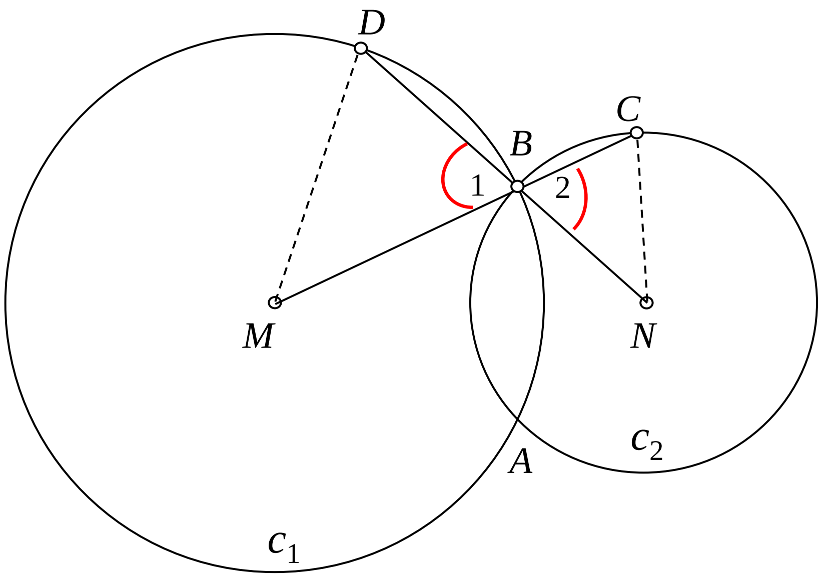
Vraag 18. Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

Bewijs:

$MB = MD$ en $NB = NC$ (*cirkels*)
dus $\angle D = \angle B_1$ en $\angle B_2 = \angle C$ (*gelijkbenige driehoeken*)

2011-II   Snijdende cirkels

Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D. Zie de figuur.

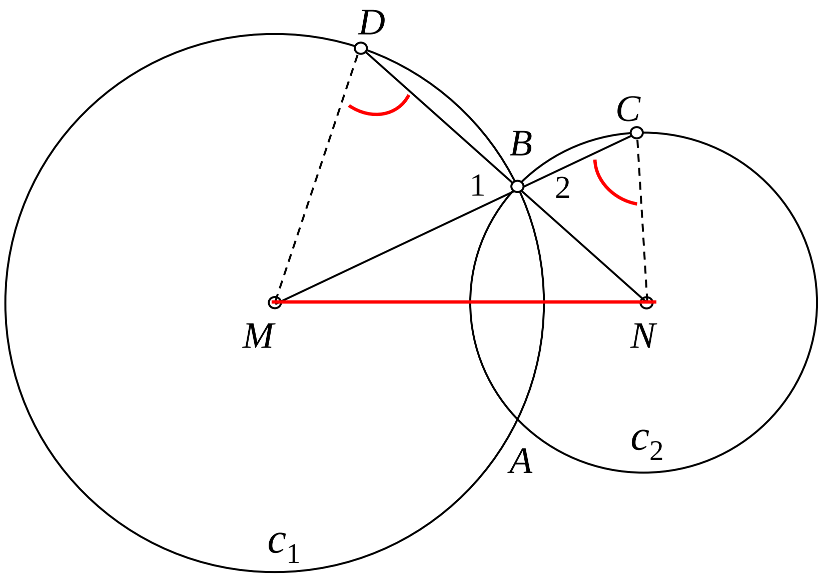


Vraag 18. Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

Bewijs:

$MB = MD$ en $NB = NC$ (*cirkels*)
dus $\angle D = \angle B_1$ en $\angle B_2 = \angle C$ (*gelijkbenige driehoeken*)
$\angle B_1 = \angle B_2$ (*overstaande hoeken*)
dus

2011-II Snijdende cirkels



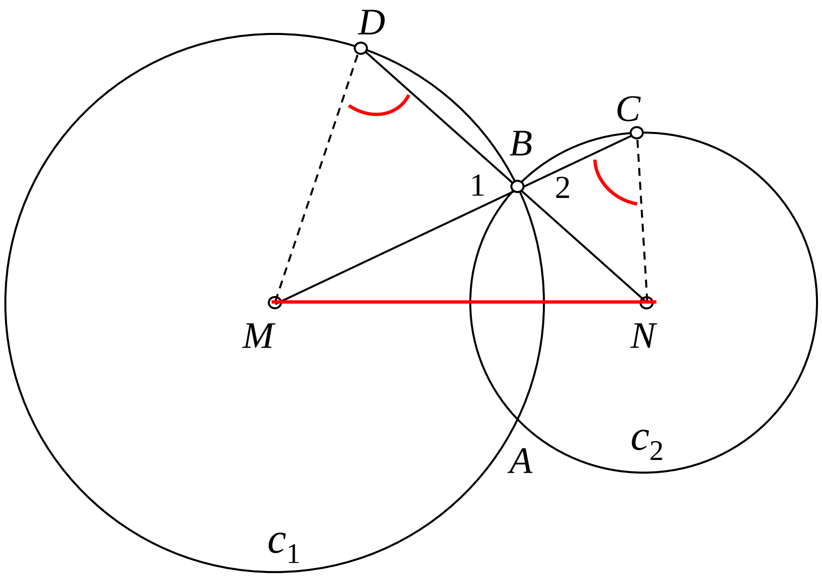
Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D. Zie de figuur.

Vraag 18. Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

Bewijs:

$MB = MD$ en $NB = NC$ (*cirkels*)
dus $\angle D = \angle B_1$ en $\angle B_2 = \angle C$ (*gelijkbenige driehoeken*)
$\angle B_1 = \angle B_2$ (*overstaande hoeken*)
dus $\angle D = \angle C$
D en C kijken onder dezelfde hoek naar MN, dus

2011-II Snijdende cirkels



Twee cirkels c_1 en c_2 met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Het verlengde van de straal MB snijdt c_2 in het punt C en het verlengde van de straal NB snijdt c_1 in het punt D. Zie de figuur.

Vraag 18. Bewijs dat de punten M, N, C en D op één cirkel liggen.

Bewijs:

$MB = MD$ en $NB = NC$ (*cirkels*)
dus $\angle D = \angle B_1$ en $\angle B_2 = \angle C$ (*gelijkbenige driehoeken*)
$\angle B_1 = \angle B_2$ (*overstaande hoeken*)
dus $\angle D = \angle C$
D en C kijken onder dezelfde hoek naar MN, dus
$MNDC$ is een koordenvierhoek (*stelling van de constante hoek*).