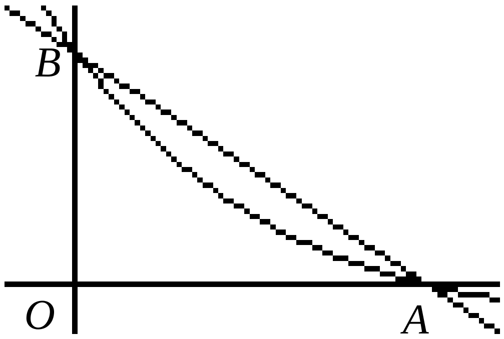
2012 – I   Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

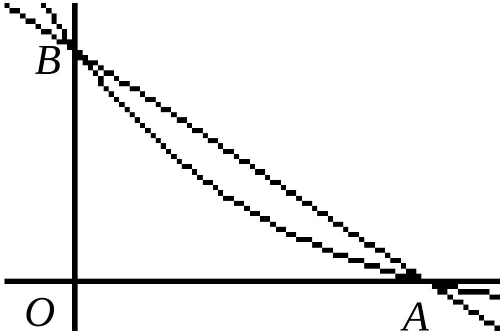
1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in B (0,1).

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

2012 – I   Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

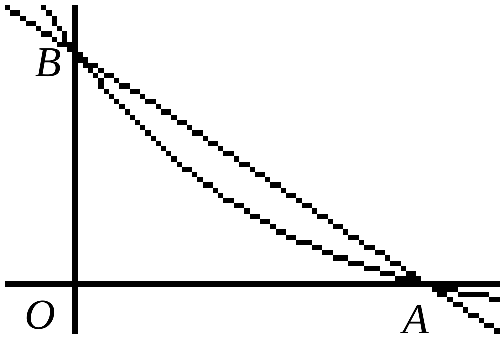
De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a,\ 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

----

1. $F_a\,'(x) =$

2012 – I Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in $B(0,1)$.

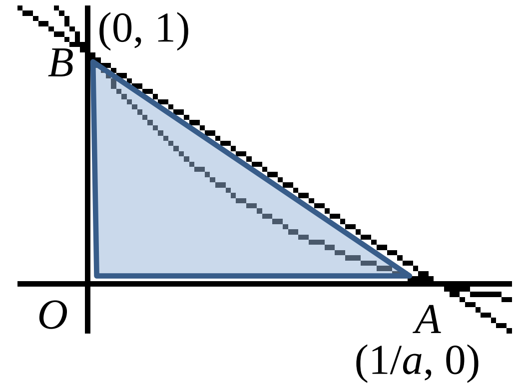
De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

---

1. $F_a'(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot -a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

$\uparrow$ *productregel* $\uparrow$ *kettingregel*

2012 – I Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

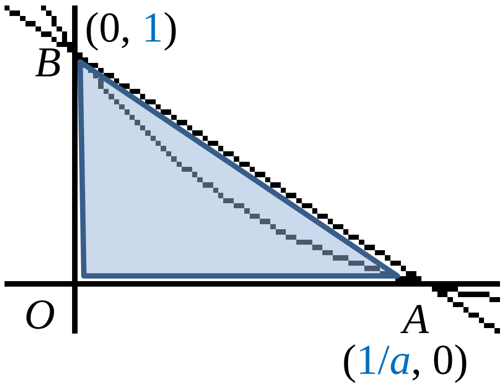
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

---

1. $F_a\,'(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax} \cdot - a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

2. Opp. ΔOAB is:

2012 - I Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

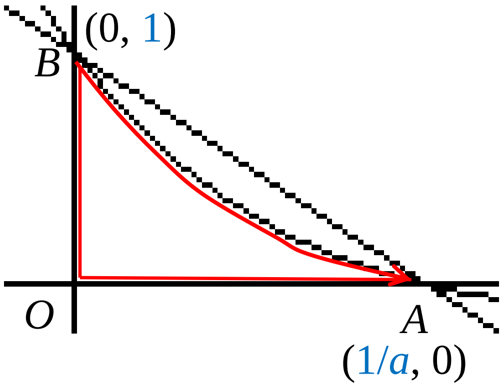
---

1. $F_a\text{‘}(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot - a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is:

2012 – I   Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a,\ 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

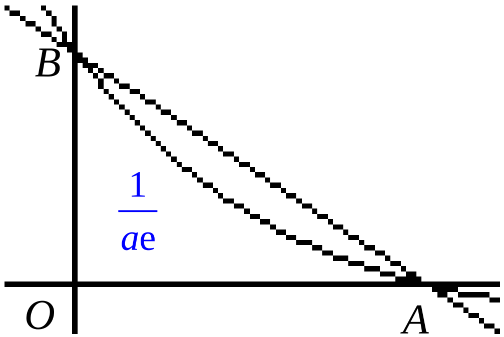
----

1. $F_a\text{‘}(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot - a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is: $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \left[F_a\right]_0^{1/a} =$

2012 – I   Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.
----

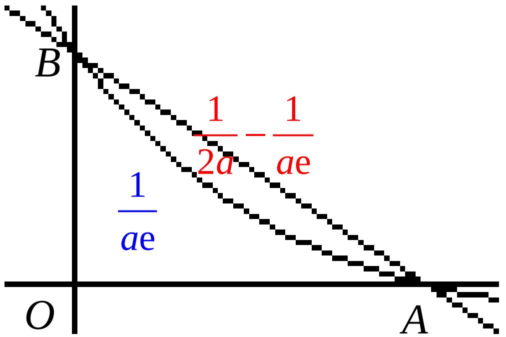
1. $F_a\text{‘}(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot - a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is: $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \left[F_a\right]_0^{1/a} = \frac{1}{a}e^{-a\cdot 1/a} - 0 = \frac{1}{a}e^{-1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{ae}$

Opp. tussen de grafieken is:

2012 – I Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

---

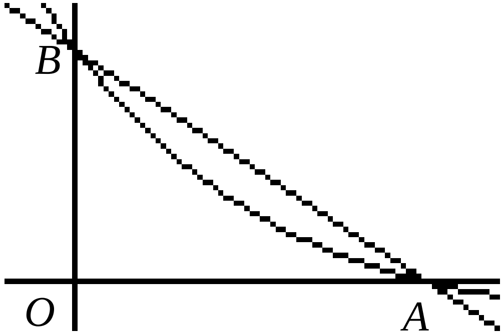
1. $F_a\text{‘}(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot - a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is: $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \left[F_a\right]_0^{1/a} = \frac{1}{a}e^{-a\cdot 1/a} - 0 = \frac{1}{a}e^{-1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{ae}$

Opp. tussen de grafieken is: $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}$

2012 – I Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax) \cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x \cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in B (0,1).

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.
----

1. $F_a\,'(x) = 1 \cdot e^{-ax} + x \cdot e^{-ax} \cdot - a = (1 - ax) \cdot e^{-ax} = f_a(x)$

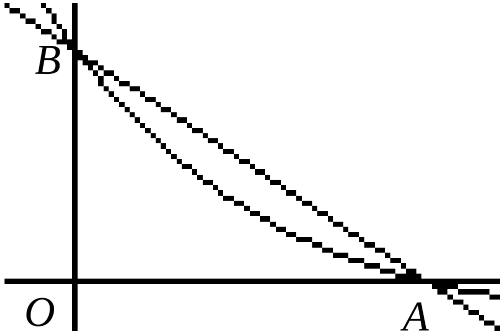
2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is: $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \left[F_a\right]_0^{1/a} = \frac{1}{a} e^{-a \cdot 1/a} - 0 = \frac{1}{a} e^{-1} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{ae}$

Opp. tussen de grafieken is: $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}$

De verhouding is:

2012 - I   Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a,\ 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.
2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

---

1. $F_a\,'(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot - a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

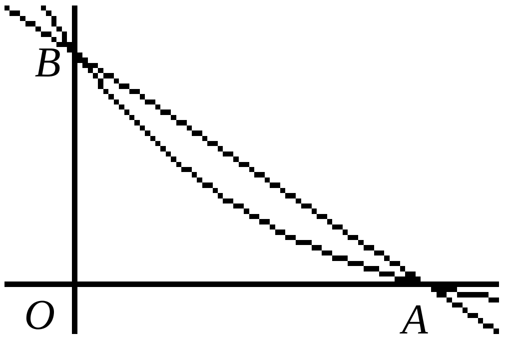
2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is: $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \left[F_a\right]_0^{1/a} = \frac{1}{a}e^{-a\cdot 1/a} - 0 = \frac{1}{a}e^{-1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{ae}$

Opp. tussen de grafieken is: $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}$

De verhouding is: $\dfrac{\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}}{\frac{1}{ae}} =$

2012 - I Onafhankelijk van a



Voor $a>0$ is gegeven de functie: $f_a(x) = (1 - ax)\cdot e^{-ax}$

1. Toon aan dat $F_a(x) = x\cdot e^{-ax}$ een primitieve functie is van $f_a(x)$.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in $A(1/a, 0)$ en de y-as in $B\ (0,1)$.

De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

2. Toon aan dat de verhouding van de oppervlakte van deze twee delen onafhankelijk is van a.

----

1. $F_a\,'(x) = 1\cdot e^{-ax} + x\cdot e^{-ax}\cdot -a = (1 - ax)\cdot e^{-ax} = f_a(x)$

2. Opp. ΔOAB is: ½ basis × hoogte = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1 = \frac{1}{2a}$

Opp. onder grafiek f_a is: $\int_0^{1/a} f_a(x)\,dx = \left[F_a\right]_0^{1/a} = \frac{1}{a}e^{-a\cdot 1/a} - 0 = \frac{1}{a}e^{-1} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{ae}$

Opp. tussen de grafieken is: $\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}$

De verhouding is: $\dfrac{\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}}{\frac{1}{ae}} = \dfrac{\frac{1}{2a} - \frac{1}{ae}}{\frac{1}{ae}}\cdot\dfrac{ae}{ae} = \dfrac{\frac{e}{2} - 1}{1}$ is onafhankelijk van a.

$\dfrac{1}{\frac{e}{2} - 1} = \dfrac{2}{e - 2}$ is ook goed

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.
Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is:

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))², X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

----

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.

2012 – I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))², X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

---

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.
naar rechts: …. omhoog: ….

2012 - I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))^2, X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

----

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.

naar rechts: 87,5 omhoog: 32,5

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))², X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

---

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD.*

Die vergelijking heeft de vorm:

2012 - I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))^2, X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

----

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.

Die vergelijking heeft de vorm: $y = a \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$

Gaat door *D*(155, 23) dus:

Naar rechts *Omhoog*

2012 – I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas. Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))², X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

---

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.

Die vergelijking heeft de vorm: $y = a \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$

Gaat door *D*(155, 23) dus: $23 = a \cdot (\underbrace{155 - 87{,}5}_{67{,}5})^2 + 32{,}5$ dus $a =$

2012 - I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.
Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))², X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

----

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.

Die vergelijking heeft de vorm: $y = a \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$

Gaat door *D*(155, 23) dus: $23 = a \cdot (155 - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ dus $a = -9{,}5 / (67{,}5)^2 \approx -0{,}002$

De vergelijking van *CD* is dus:

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.
Kromme *AB* is de grafiek van $f(x) = 4{,}5 + 28 \cdot e^{-0{,}452x}$ op het domein [0, 55.3].

3. Bereken het volume in cm^3 van het lichaam dat ontstaat als kromme *AB* om de *x*-as wentelt.

Het volume is: $\pi \cdot \int_0^{55.3} (f(x))^2 \, dx$ en mag berekend worden met de GR.

Bijvoorbeeld via fnInt((4.5+28e^(-.425X))², X, 0, 55.3) = 7994 (mm^3) = 8 cm^3.

---

4. Een bergparabool heeft als top *C*(87.5, 32.5) en gaat door *D*(155, 23). Kromme *CD* is ontstaan na verschuiving van $y = a \cdot x^2$. Stel een vergelijking op voor kromme *CD*.

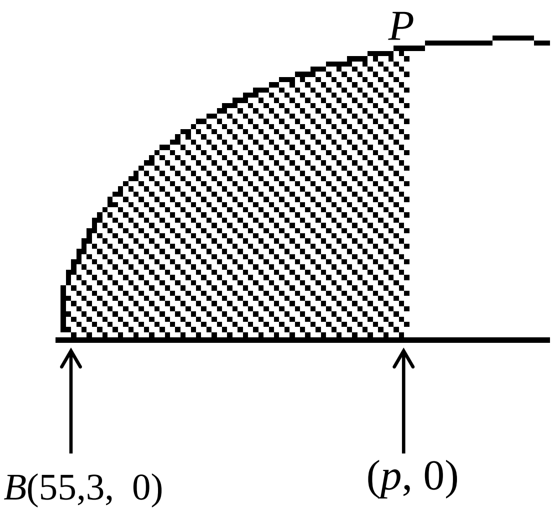
Die vergelijking heeft de vorm: $y = a \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$

Gaat door *D*(155, 23) dus: $23 = a \cdot (155 - 87{,}5)^2 + 32{,}5$ dus $a = -9{,}5 / (67{,}5)^2 \approx -0{,}002$

De vergelijking van *CD* is dus: $y = -0{,}002 \cdot (x - 87{,}5)^2 + 32{,}5$

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.



Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55{,}3$ en $x = p$,
wordt gewenteld om de *x*-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.

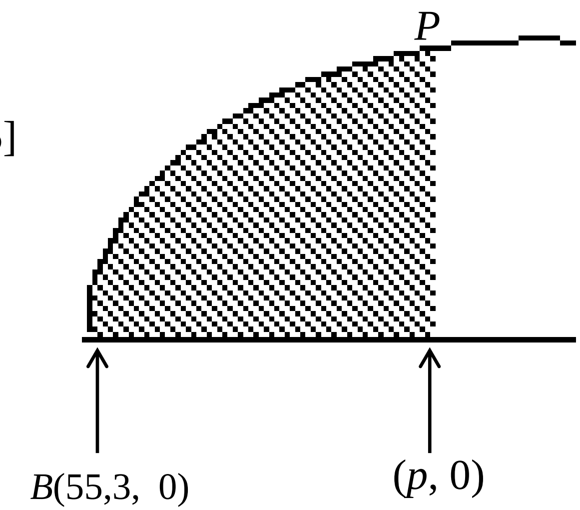
5. Bereken met behulp van primitiveren de *x*-coördinaat van *P*.

2012 – I   Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55,3$ en $x = p$,
wordt geweenteld om de *x*-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.



5. Bereken met behulp van primitiveren de *x*-coördinaat van *P*.

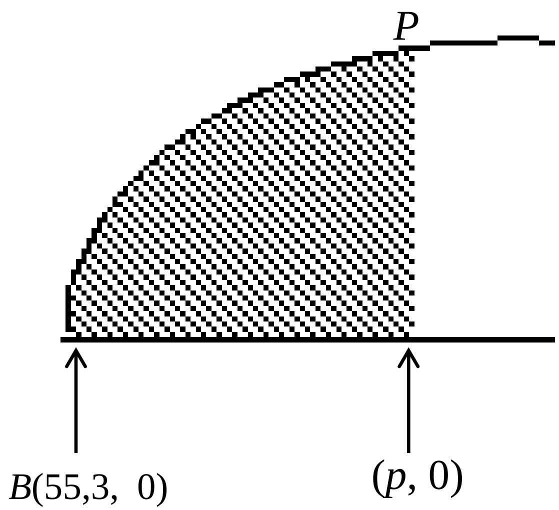
De inhoud is:

2012 – I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55{,}3$ en $x = p$,
wordt gewenteld om de *x*-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.



5. Bereken met behulp van primitiveren de *x*-coördinaat van *P*.

De inhoud is: $\pi \cdot \int_{55,3}^{p} (g(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_{55,3}^{p} \left[\sqrt{-x^2 + 175x - 6600)} \right]^2 dx = \pi \cdot \int_{55,3}^{p} (-x^2 + 175x - 6600) \, dx$

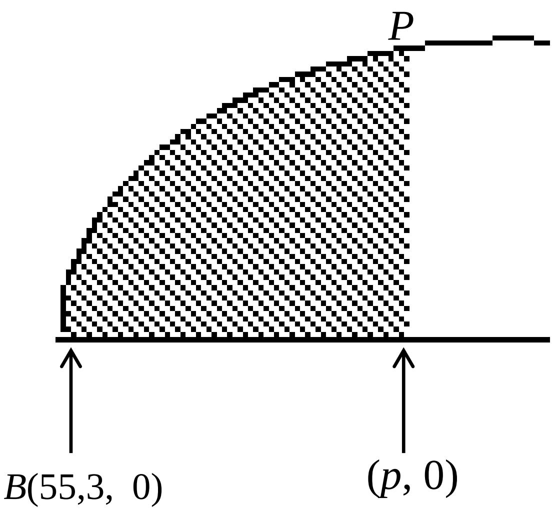
Primitiveren:

2012 - I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55,3$ en $x = p$,
wordt gewenteld om de *x*-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.



5. Bereken met behulp van primitiveren de *x*-coördinaat van *P*.

De inhoud is: $\pi \cdot \int_{55,3}^{p} (g(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_{55,3}^{p} \left[\sqrt{-x^2 + 175x - 6600)} \right]^2 dx = \pi \cdot \int_{55,3}^{p} (-x^2 + 175x - 6600) \, dx$

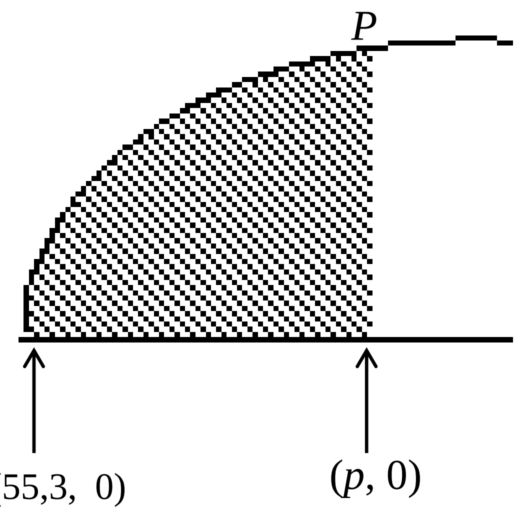
Primitiveren: $\pi \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 87,5x^2 - 6600x \right]_{55,3}^{p} \quad =$

2012 - I Het wijnglas

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55,3$ en $x = p$,
wordt gedraaid om de x-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.



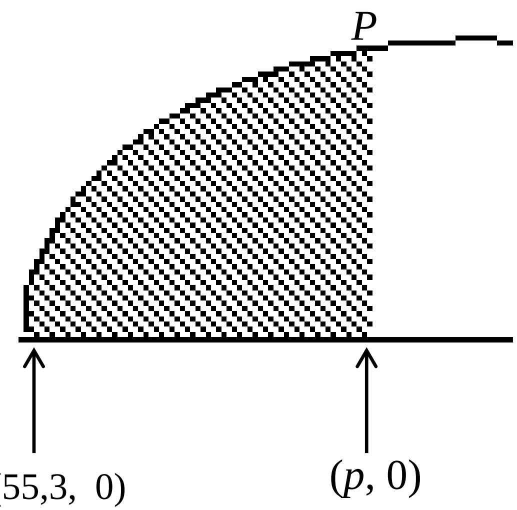
5. Bereken met behulp van primitiveren de x-coördinaat van P.

De inhoud is: $\pi \cdot \int_{55,3}^{p} (g(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_{55,3}^{p} \left[\sqrt{-x^2 + 175x - 6600)} \right]^2 dx = \pi \cdot \int_{55,3}^{p} (-x^2 + 175x - 6600) \, dx$

Primitiveren: $\pi \cdot \left[-\frac{1}{3} x^3 + 87,5x^2 - 6600x \right]_{55,3}^{p} = 50000 \text{ (mm}^3\text{)}$ en gebruik hierna de GR:

1 ml = 1 cm^3 = 1000 mm^3

2012 – I Het wijnglas



De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x)=\sqrt{-x^2+175x-6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55{,}3$ en $x = p$,
wordt gewenteld om de x-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.

5. Bereken met behulp van primitiveren de x-coördinaat van P.

De inhoud is: $\pi\cdot\int_{55,3}^{p}(g(x))^2\,dx=\pi\cdot\int_{55,3}^{p}\left[\sqrt{-x^2+175x-6600)}\right]^2 dx=\pi\cdot\int_{55,3}^{p}(-x^2+175x-6600)\,dx$

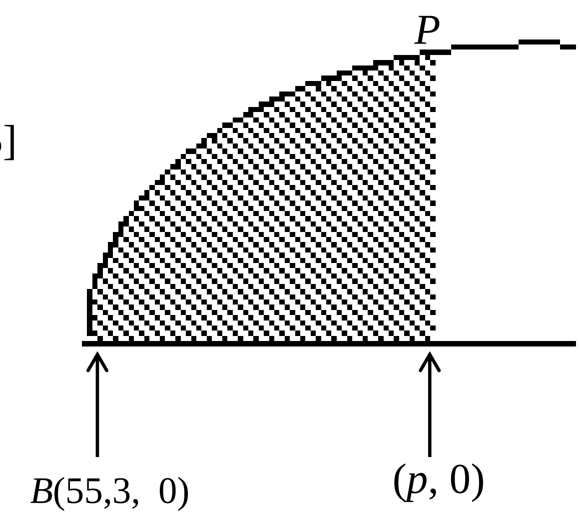
Primitiveren: $\pi\cdot\left[-\frac{1}{3}x^3+87{,}5x^2-6600x\right]_{55,3}^{p} \quad = \quad 50000\ (ml)$ en gebruik hierna de GR:

Doe Y1 = π((1/3)X^3+87.5X²-6600X) en Y2 = Y1(X)-Y1(55.3) en Y3 = 50000.

Daarna bijv. grafiek Y2 en Y3 plus intersect met window 50≤X≤100 en 0≤Y≤100000.

Geeft oplossing:

2012 - I   Het wijnglas



De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme *BP* is deel van de grafiek van $g(x)=\sqrt{-x^2+175x-6600}$.

Het gearceerde gebied, tussen $x = 55{,}3$ en $x = p$,
wordt gewenteld om de x-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.

5. Bereken met behulp van primitiveren de x-coördinaat van P.

De inhoud is: $\pi\cdot\int_{55,3}^{p}(g(x))^2\,dx=\pi\cdot\int_{55,3}^{p}\left[\sqrt{-x^2+175x-6600)}\right]^2dx=\pi\cdot\int_{55,3}^{p}(-x^2+175x-6600)\,dx$

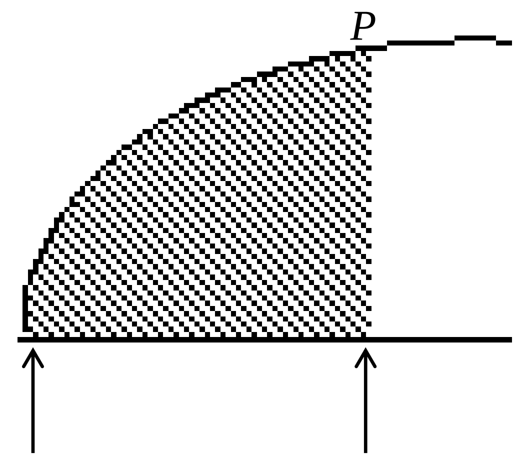
Primitiveren: $\pi\cdot\left[-\frac{1}{3}x^3+87{,}5x^2-6600x\right]_{55,3}^{p} \quad = \quad 50000\,(ml)$ en gebruik hierna de GR:

Doe Y1 = π((1/3)X^3+87.5X²-6600X) en Y2 = Y1(X)-Y1(55.3) en Y3 = 50000.

Daarna bijv. grafiek Y2 en Y3 plus intersect met window 50≤X≤100 en 0≤Y≤100000.

Geeft oplossing: X≈80.8 dus afgerond: $x_P = p = 81$ (mm).

2012 – I Het wijnglas



$B(55{,}3,\ 0)$ $(p,\ 0)$

De eenheid van lengte in deze opgave is mm. Domein [55,3; 87,5]
Beschreven wordt de vorm van een wijnglas.

Kromme BP is deel van de grafiek van $g(x) = \sqrt{-x^2 + 175x - 6600}$.

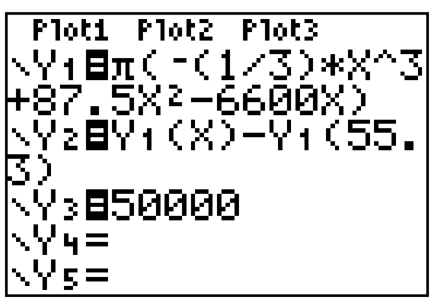
Het gearceerde gebied, tussen $x = 55{,}3$ en $x = p$,
wordt gewenteld om de x-as zodat de inhoud daarvan 50 ml is.

5. Bereken met behulp van primitiveren de x-coördinaat van P.

De inhoud is: $\pi \cdot \int_{55{,}3}^{p} (g(x))^2\ dx = \pi \cdot \int_{55{,}3}^{p} \left[\sqrt{-x^2 + 175x - 6600)}\right]^2\ dx = \pi \cdot \int_{55{,}3}^{p} (-x^2 + 175x - 6600)\ dx$

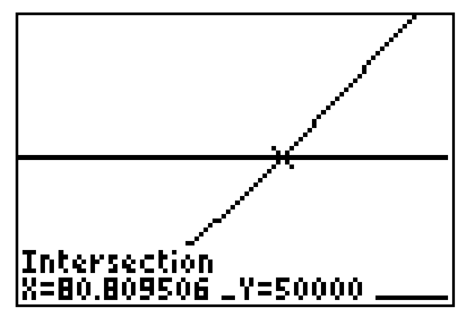
Primitiveren: $\pi \cdot \left[-\frac{1}{3}x^3 + 87{,}5x^2 - 6600x\right]_{55{,}3}^{p} \quad = \quad 50000\ (ml)$ en gebruik hierna de GR:

Doe Y1 = π((1/3)X^3+87.5X²-6600X) en Y2 = Y1(X)-Y1(55.3) en Y3 = 50000.

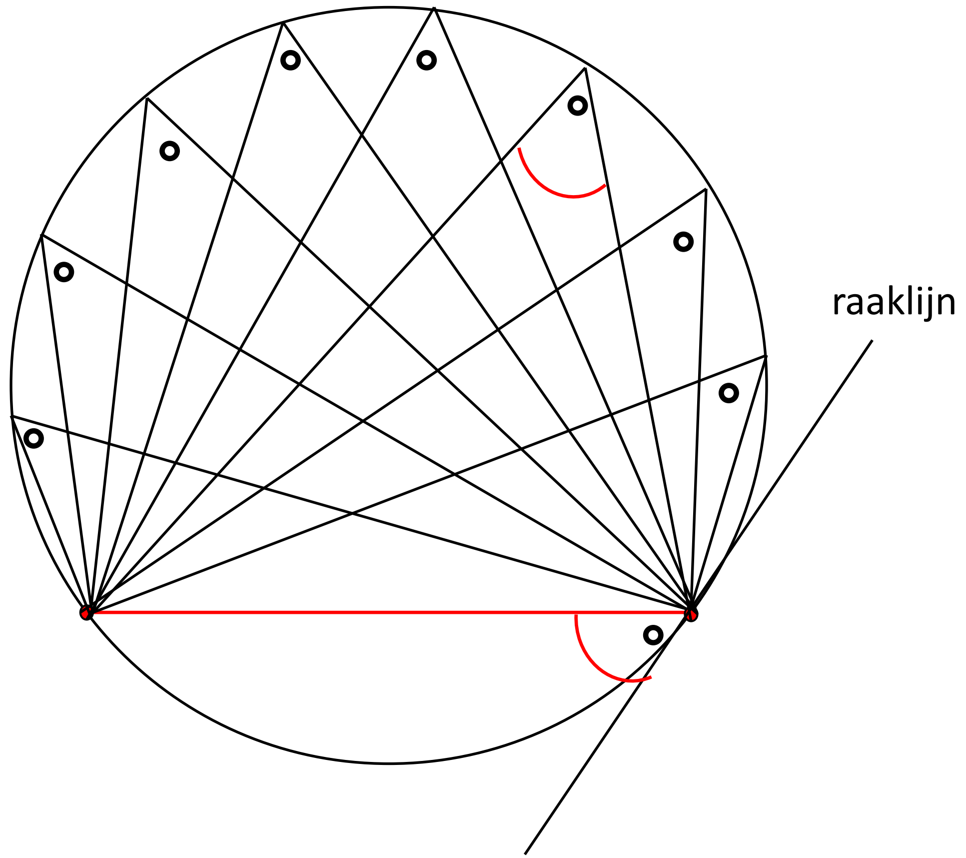


ondergrens: -483076

X=80.8



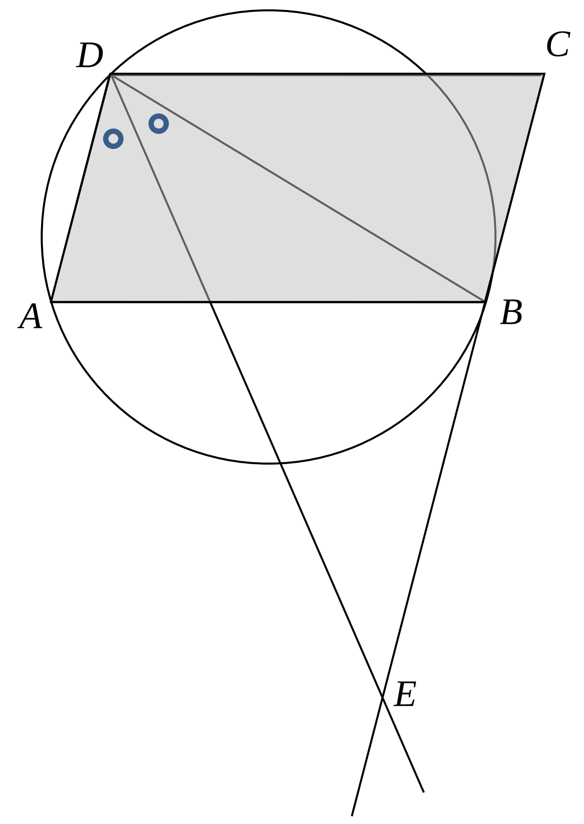
De stelling van de constante omtrekshoek



2012 – I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*.

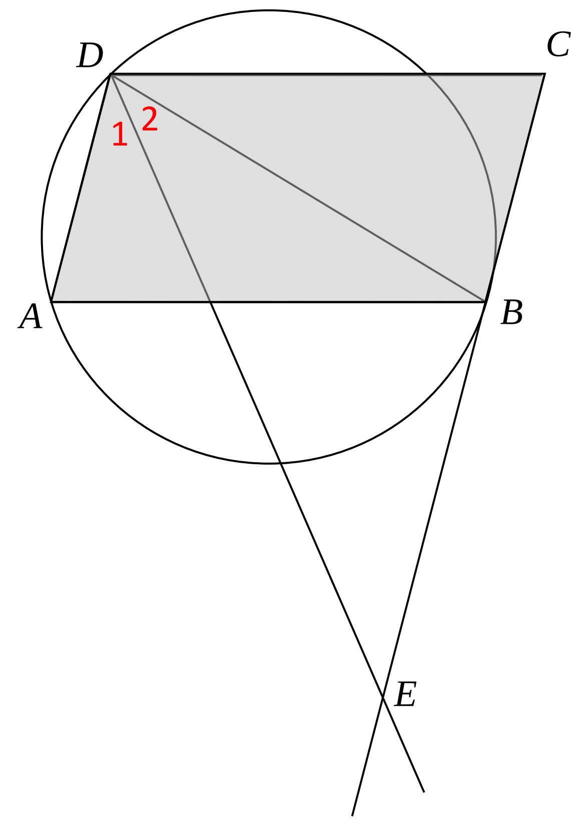
6. Bewijs dat driehoek *BDE* gelijkbenig is.



2012 - I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*.

6. Bewijs dat driehoek *BDE* gelijkbenig is.



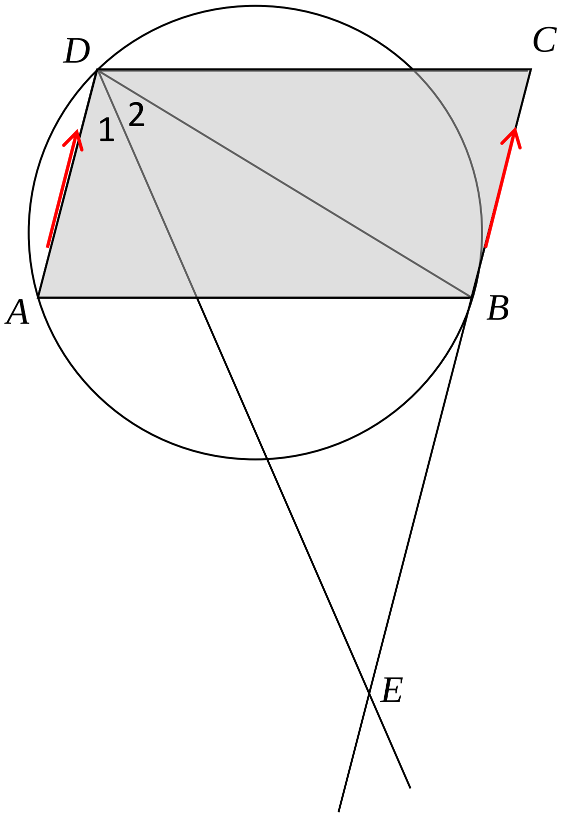
Bewijs: $\angle D1 = \angle D2$ (*bissectrice*)

.

2012 - I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*.

6. Bewijs dat driehoek *BDE* gelijkbenig is.



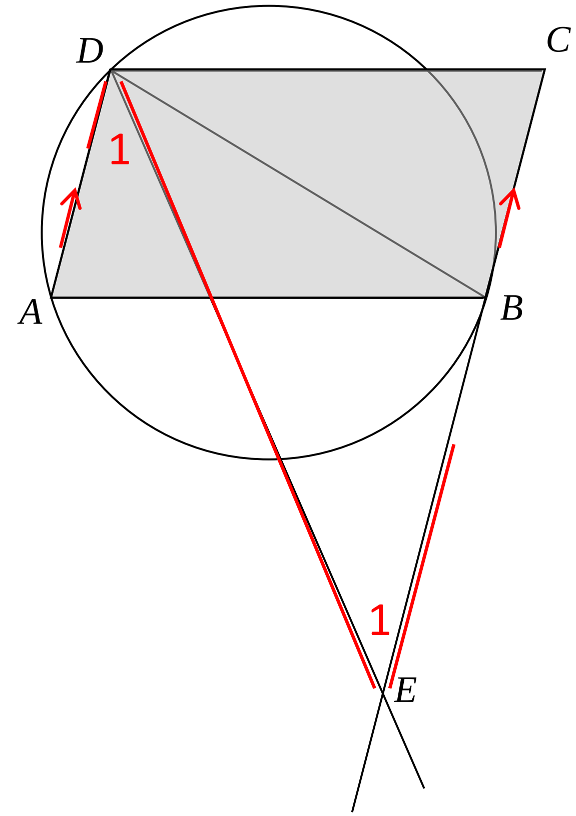
Bewijs: $\angle D1 = \angle D2$ (*bissectrice*)

AD // *BC* (*parallellogram*)

2012 - I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*.

6. Bewijs dat driehoek *BDE* gelijkbenig is.



Bewijs: $\angle D1 = \angle D2$ (*bissectrice*)

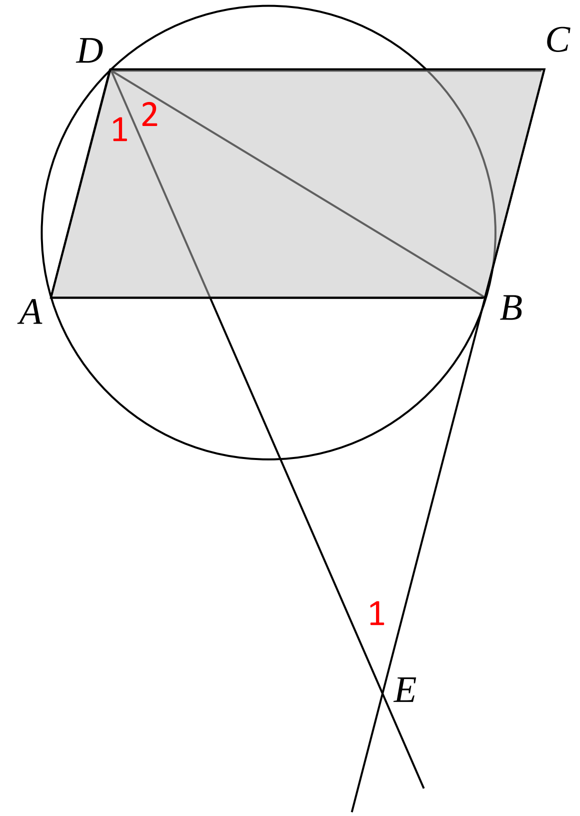
AD // *BC* (*parallellogram*)

$\angle D1 = \angle E1$ (*Z-hoeken*)

2012 - I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*.

6. Bewijs dat driehoek *BDE* gelijkbenig is.



Bewijs: $\angle D1 = \angle D2$ (*bissectrice*)

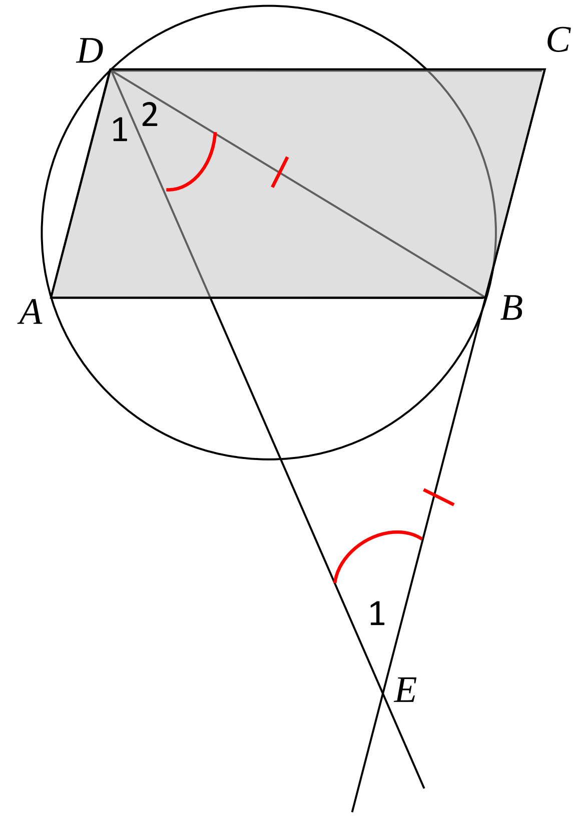
AD // *BC* (*parallellogram*)

$\angle D1 = \angle E1$ (*Z-hoeken*)

Dus $\angle D2 = \angle E1$

2012 - I   Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*.



6. Bewijs dat driehoek *BDE* gelijkbenig is.

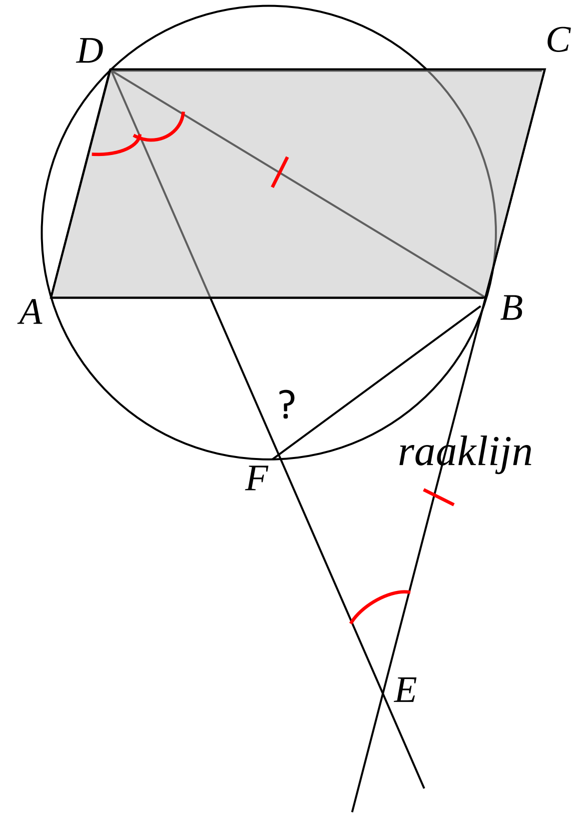
Bewijs: $\angle D1 = \angle D2$ (*bissectrice*)
AD // *BC* (*palallellogram*)
$\angle D1 = \angle E1$ (*Z-hoeken*)

Dus $\angle D2 = \angle E1$
Dus ΔBDE is *gelijkbenig*.

2012 - I   Parallellogram

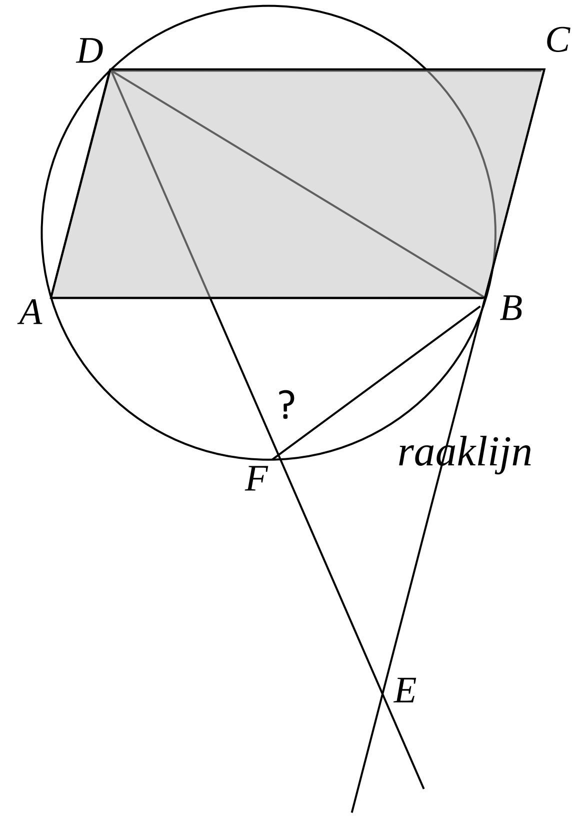
Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van Δ*ABC* raakt. Verder is nog steeds gegeven dat Δ*BDE* gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.

7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.



2012 – I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.



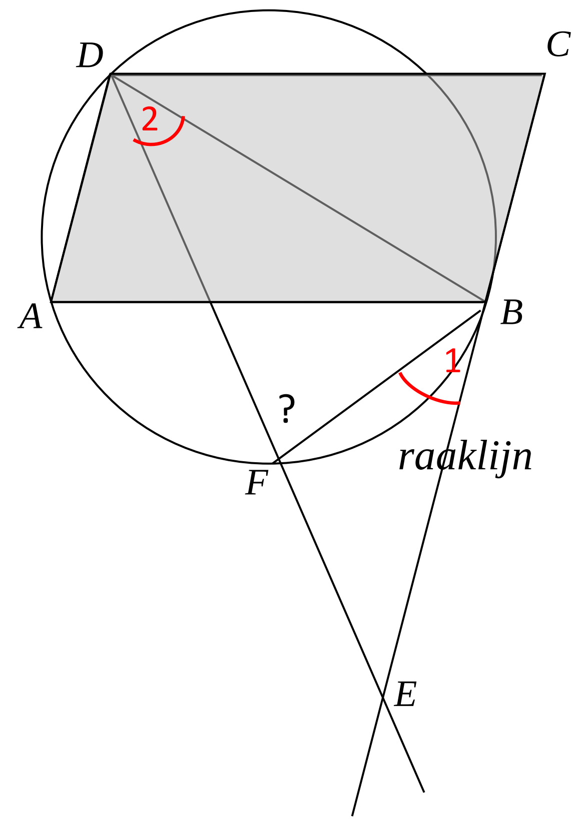
7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.

- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is:

2012 - I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.

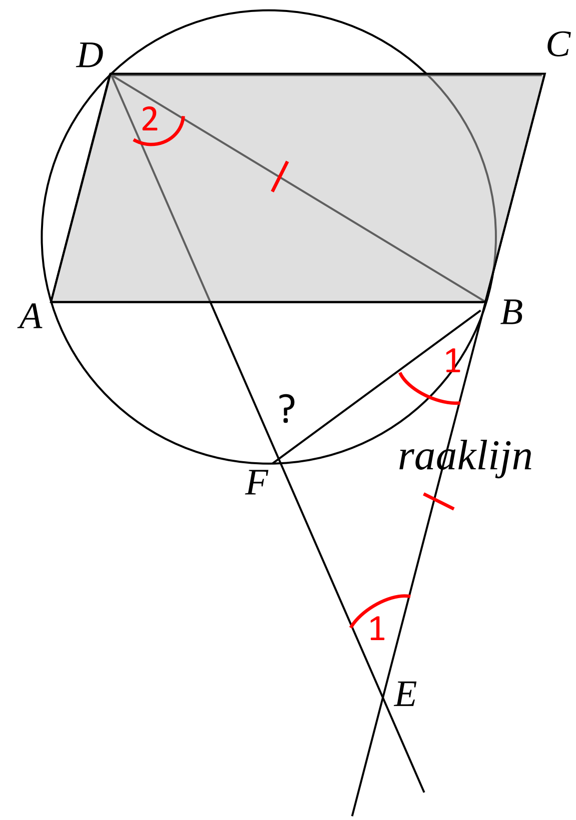
7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.



- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is: $\angle B1 = \angle D2$

2012 - I Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.



7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.

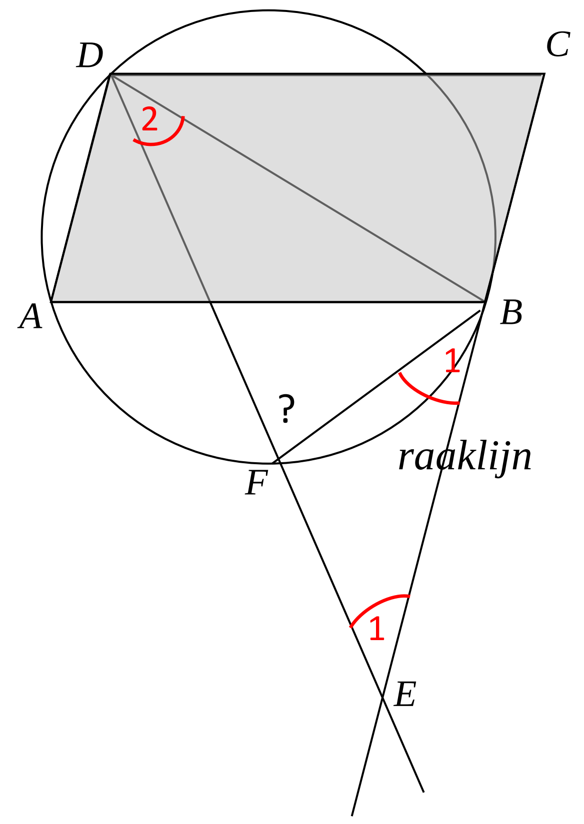
- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is: $\angle B1 = \angle D2$

- Volgens de vorige opgave is

2012 - I   Parallellogram

Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.

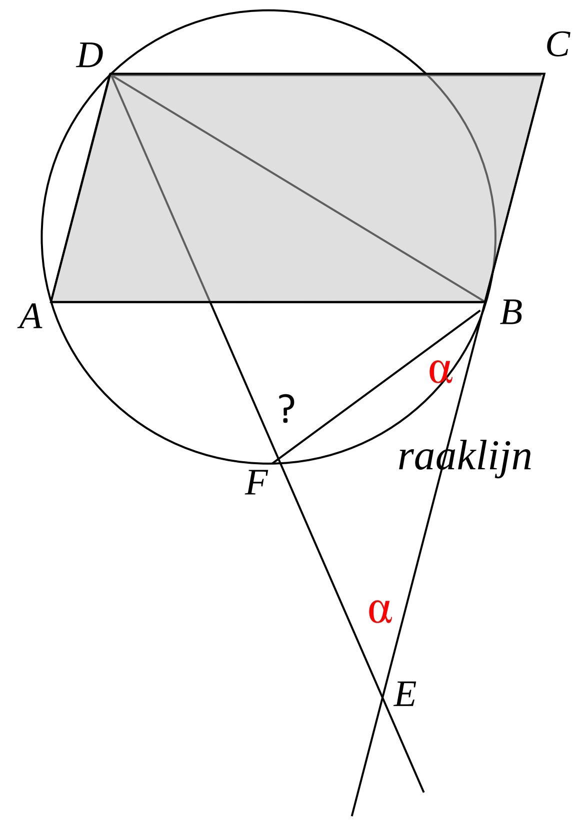
7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.



- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is: $\angle B1 = \angle D2$
- Volgens de vorige opgave is $\angle D2 = \angle E1$
- Dus $\angle B1 = \angle E1$

2012 - I   Parallellogram

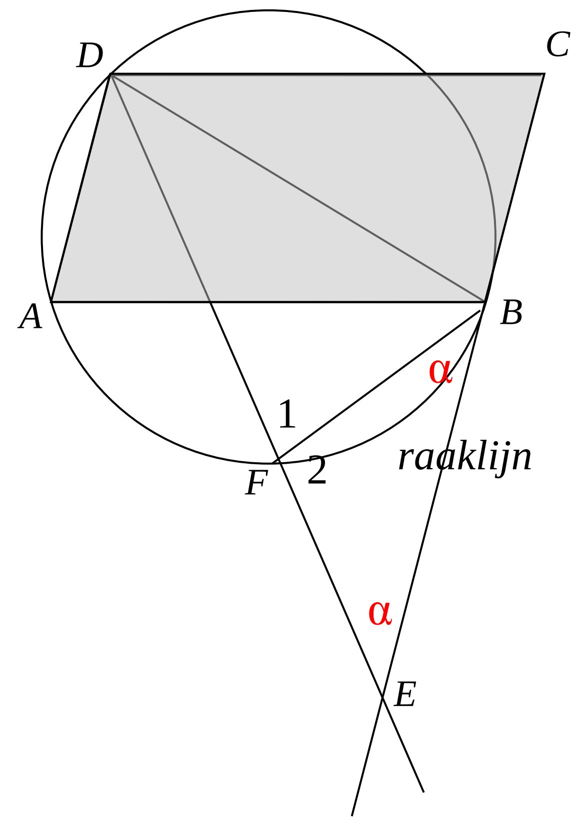
Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.



7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.

- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is: $\angle B1 = \angle D2$
- Volgens de vorige opgave is $\angle D2 = \angle E1$
- Dus $\angle B1 = \angle E1$ (= α)

2012 - I Parallellogram



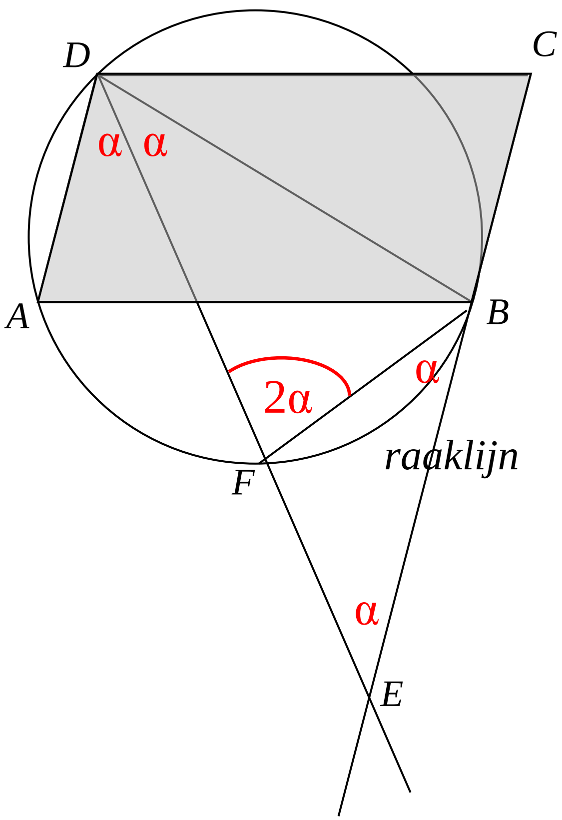
Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.

7. Bewijs dat $\angle BFD = 2 \cdot \angle BEF$.

- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is: $\angle B1 = \angle D2$
- Volgens de vorige opgave is $\angle D2 = \angle E1$
- Dus $\angle B1 = \angle E1$ (= α)
- $\angle F1$ =

2012 - I Parallellogram

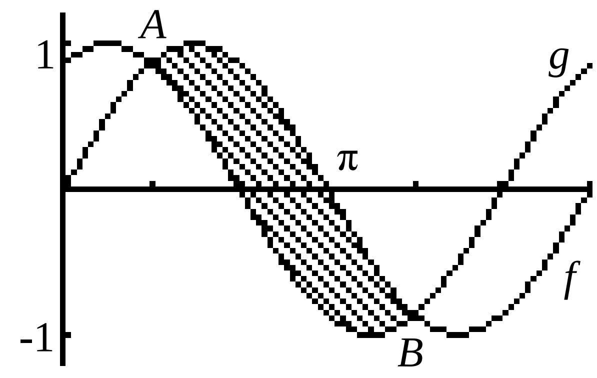
Gegeven is parallellogram *ABCD*. De bissectrice van hoek *ADB* snijdt het verlengde van *CB* in *E*. Ook nog gegeven is, dat *EC* aan de omgeschreven cirkel van ΔABC raakt. Verder is nog steeds gegeven dat ΔBDE gelijkbenig is. *DE* snijdt de cirkel in *F*.



7. Bewijs dat $\angle BFD = 2\cdot \angle BEF$.

- Volgens de *raaklijn-koorde* stelling is: $\angle B1 = \angle D2$
- Volgens de vorige opgave is $\angle D2 = \angle E1$
- Dus $\angle B1 = \angle E1$ (= α) (*gelijkbenige driehoek*)
- $\angle F1 = \angle B1 + \angle E1 = \alpha + \alpha = 2\cdot\alpha$ (*buitenhoek*)
  $\angle BFD = 2\cdot \angle BEF$.

2012 - I   Sinussen



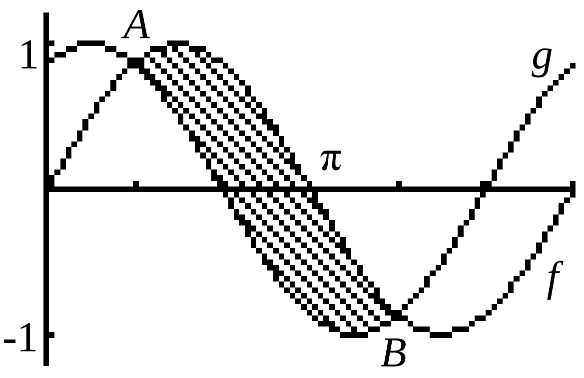
Op $[0, 2\pi]$ zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx =$$

2012 - I   Sinussen



Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

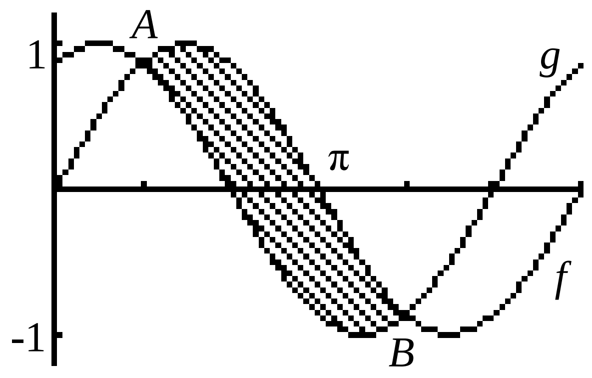
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \Big[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\Big]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} =$$

2012 - I   Sinussen

Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

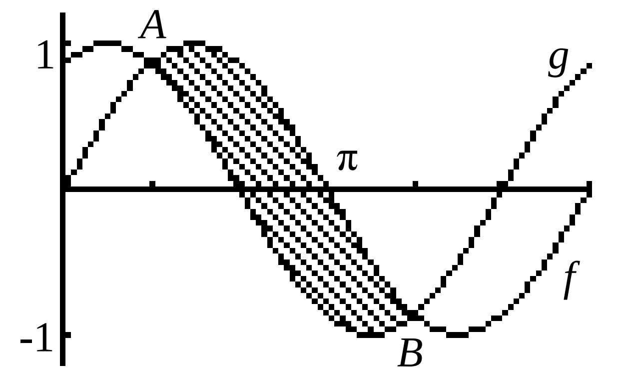


De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \left[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$$

2012 – I   Sinussen



Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \Big[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\Big]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

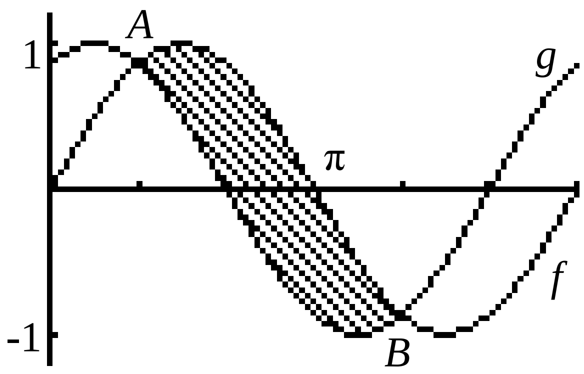
Vraag 9. Bereken exacte waarden van a en b zo dat ½ ($f(x) + g(x)$) $= a \cdot \sin(x + b)$.

Gebruik een van de volgende somformules:

$$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u \qquad \sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$$

$$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u \qquad \sin t - \sin u = 2 \sin \frac{t-u}{2} \cos \frac{t+u}{2}$$

2012 - I   Sinussen



Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

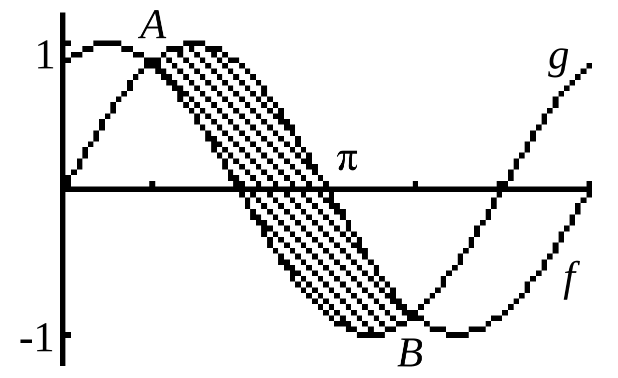
Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \Big[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\Big]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$$

Vraag 9. Bereken exacte waarden van a en b zo dat ½ ($f(x) + g(x)$) $= a \cdot \sin(x + b)$.

Gebruik: $\sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

2012 – I   Sinussen



Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

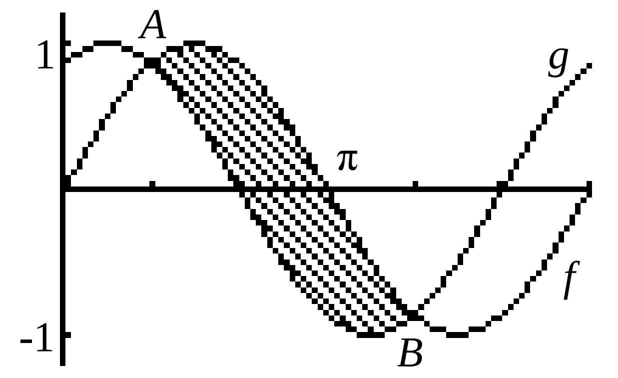
$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \left[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$$

Vraag 9. Bereken exacte waarden van a en b zo dat ½ ($f(x) + g(x)$) $= a \cdot \sin(x + b)$.

Gebruik: $\sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

Er komt: $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) =$

2012 – I Sinussen



Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

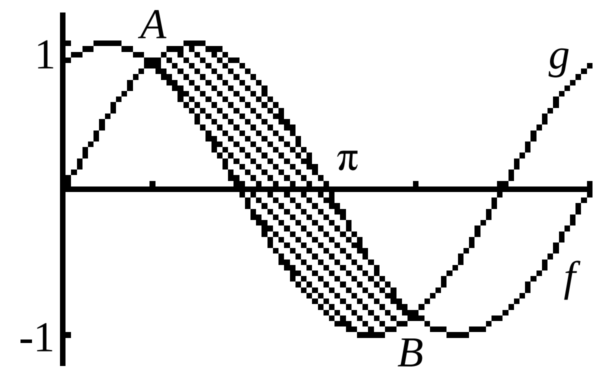
$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \Big[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\Big]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$$

Vraag 9. Bereken exacte waarden van a en b zo dat ½ ($f(x) + g(x)$) $= a \cdot \sin(x + b)$.

Gebruik: $\sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

Er komt: $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 2\sin\frac{2x + \frac{1}{3}\pi}{2}\cos\frac{0 - \frac{1}{3}\pi}{2} =$

2012 - I   Sinussen



Op [0, 2π] zijn gegeven: $f(x)=\sin x$ en $g(x)=\sin(x+\frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B met $x_A=\frac{1}{3}\pi$ en $x_B=\frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

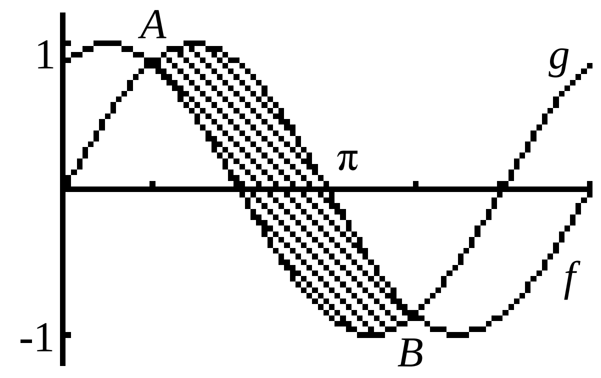
$$\text{Opp.}=\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\{\sin x-\sin(x+\tfrac{1}{3}\pi)\}\,dx=\Big[-\cos x+\cos(x+\tfrac{1}{3}\pi)\Big]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}=+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=2$$

Vraag 9. Bereken exacte waarden van a en b zo dat ½ ($f(x)+g(x)$) $= a\cdot\sin(x+b)$.

Gebruik: $\sin t+\sin u=2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

Er komt: $\sin x+\sin(x+\frac{1}{3}\pi)=2\sin\frac{2x+\frac{1}{3}\pi}{2}\cos\frac{0-\frac{1}{3}\pi}{2}=2\sin(x+\frac{1}{6}\pi)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}\sin(x+\frac{1}{6}\pi)$

2012 - I Sinussen



Op $[0, 2\pi]$ zijn gegeven: $f(x) = \sin x$ en $g(x) = \sin(x + \frac{1}{3}\pi)$

De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B

met $x_A = \frac{1}{3}\pi$ en $x_B = \frac{4}{3}\pi$

Vraag 8. Bereken met primitiveren de oppervlakte van het vlakdeel dat tussen A en B wordt ingesloten tussen f en g.

$$\text{Opp.} = \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \{\sin x - \sin(x + \tfrac{1}{3}\pi)\}\, dx = \left[-\cos x + \cos(x + \tfrac{1}{3}\pi)\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} = +\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 2$$

Vraag 9. Bereken exacte waarden van a en b zo dat ½ ($f(x) + g(x)$) = $a \cdot \sin(x + b)$.

Gebruik: $\sin t + \sin u = 2 \sin \frac{t+u}{2} \cos \frac{t-u}{2}$

Er komt: $\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi) = 2 \sin \frac{2x + \frac{1}{3}\pi}{2} \cos \frac{0 - \frac{1}{3}\pi}{2} = 2 \sin(x + \frac{1}{6}\pi) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3} \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$

Dus: $\frac{1}{2}\{\sin x + \sin(x + \frac{1}{3}\pi)\} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin(x + \frac{1}{6}\pi)$

met $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $b = \frac{1}{6}\pi$

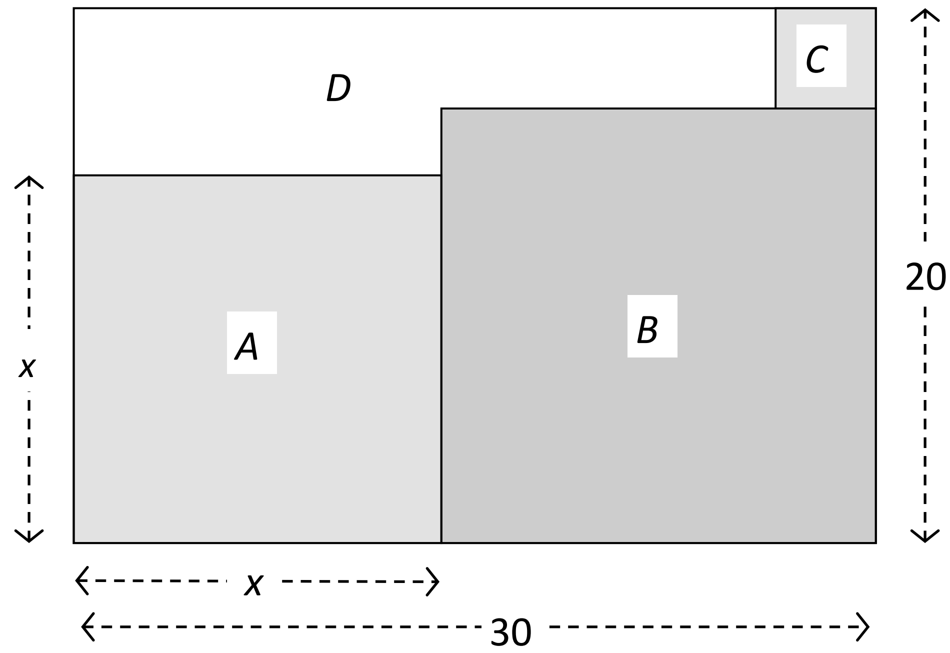
2012 – I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we *x*.

Vraag 10. Bereken de exacte waarde van *x* waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

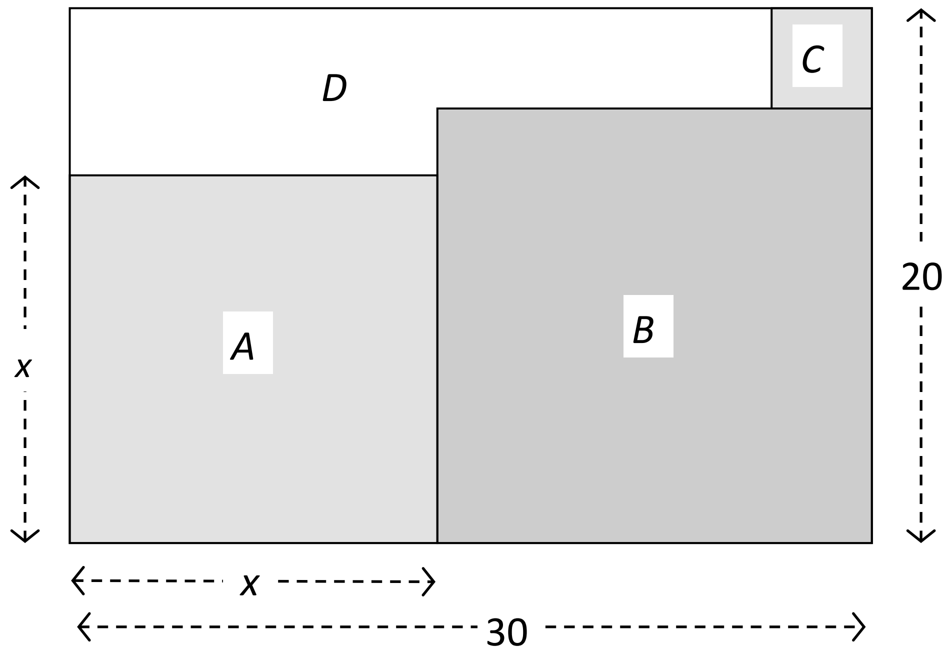


2012 – I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

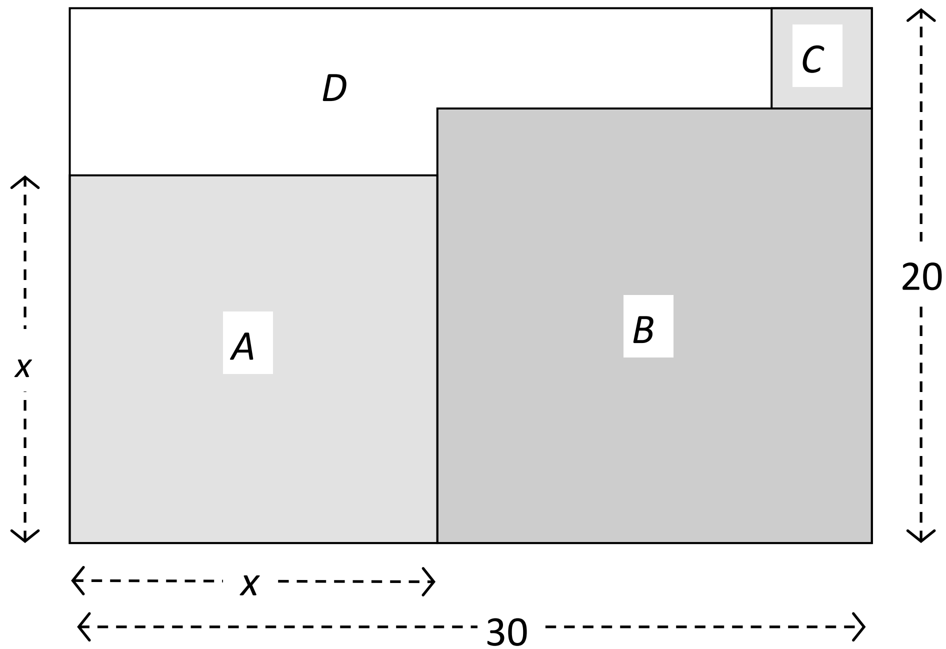
De zijde van vierkant *A* noemen we x.



Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x:

2012 – I Vierkanten



Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.

Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.

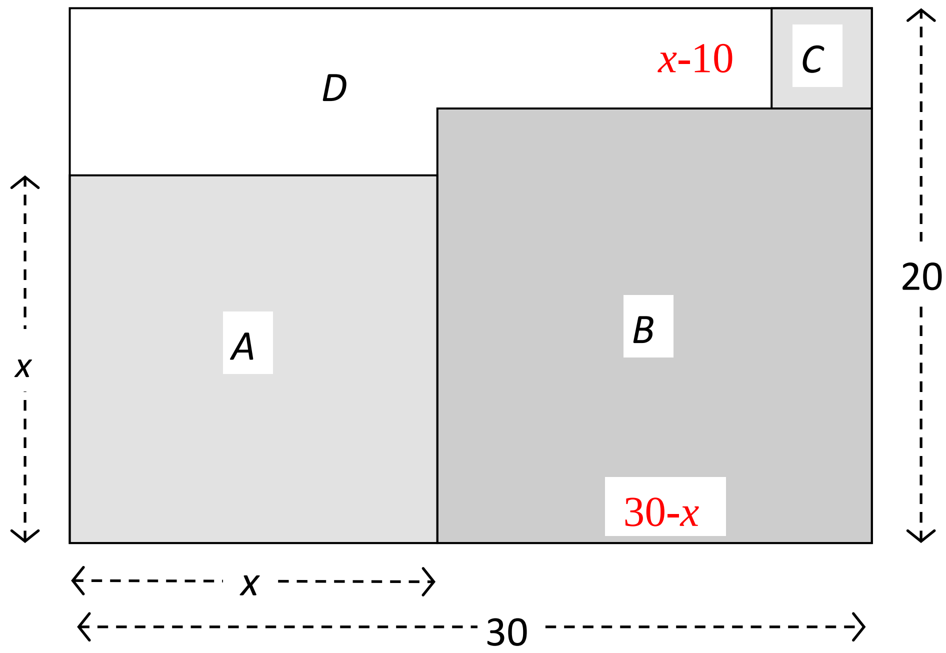
de zijde van *B* is: de zijde van *C* is:

2012 - I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.

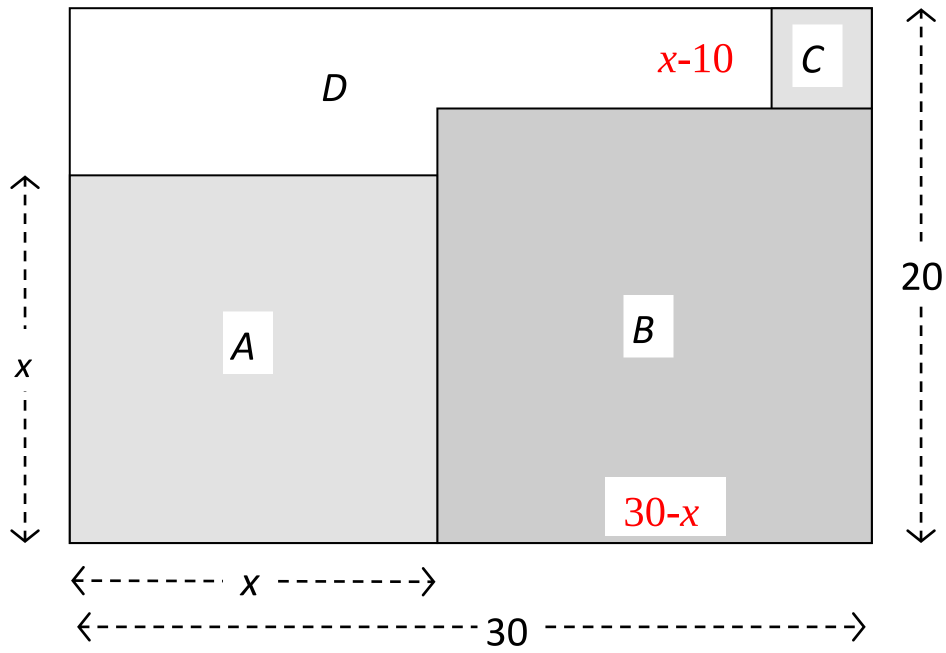


Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.

de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

2012 - I Vierkanten



Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.

Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.

de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

De oppervlakte van *D* is dus: $D(x) =$

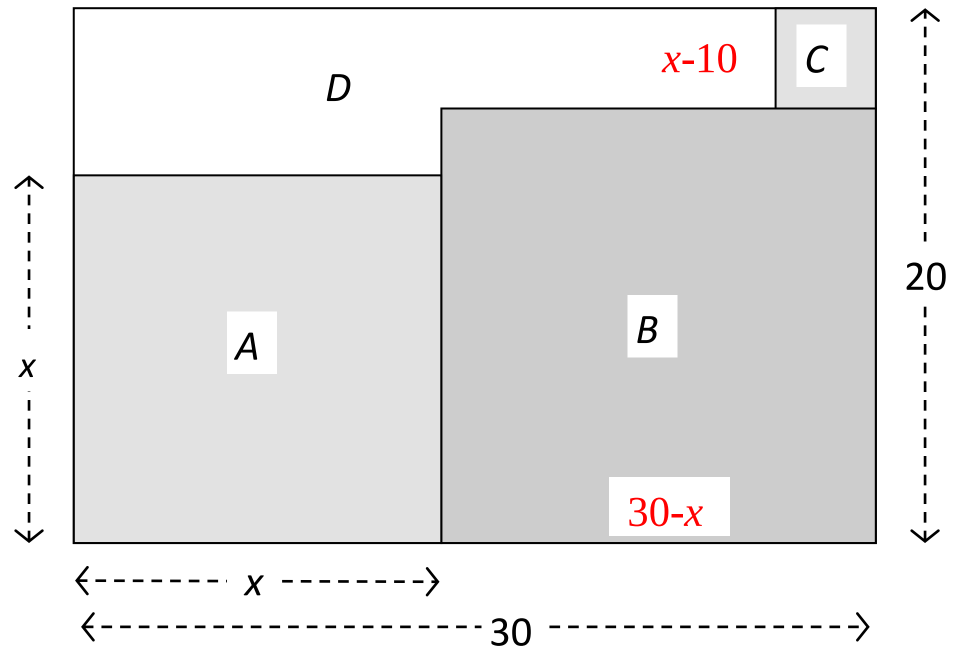
2012 - I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.

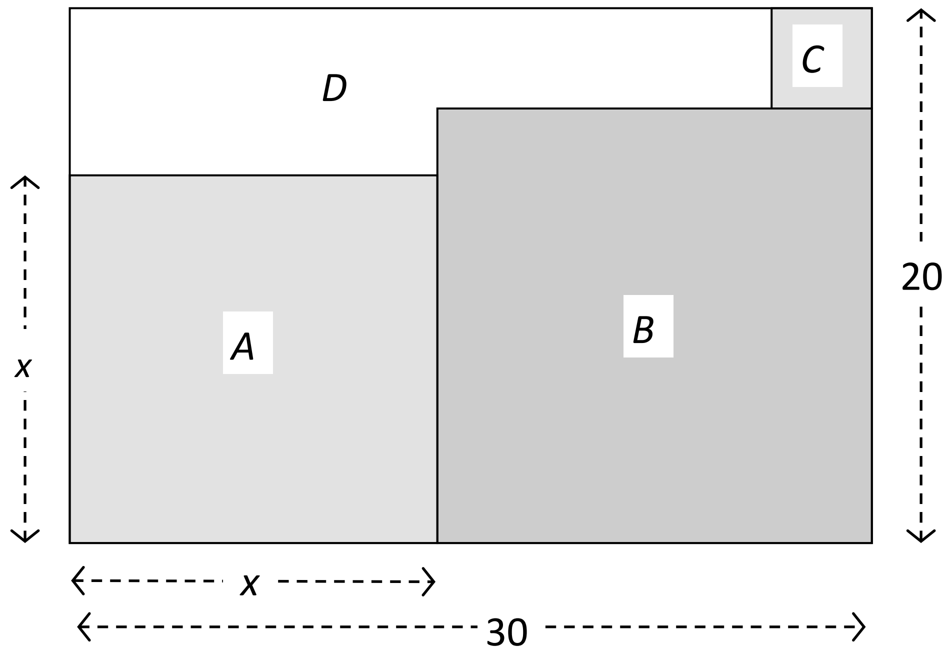
Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.



Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.
de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

De oppervlakte van *D* is dus: $D(x) = 20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2 =$

2012 – I Vierkanten



Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.

Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.
de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

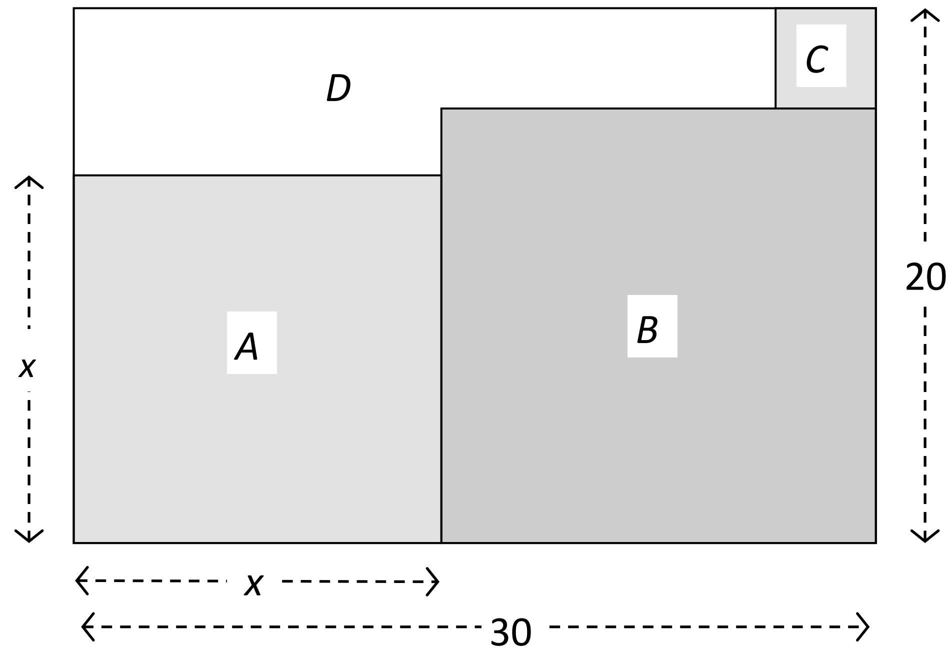
De oppervlakte van *D* is dus: $D(x) = 20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2 =$
$600 - x^2 - (900 - 60x + x^2) - (x^2 - 20x + 100) =$

2012 – I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.



Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.

de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

De oppervlakte van *D* is dus: $D(x) = 20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2 =$

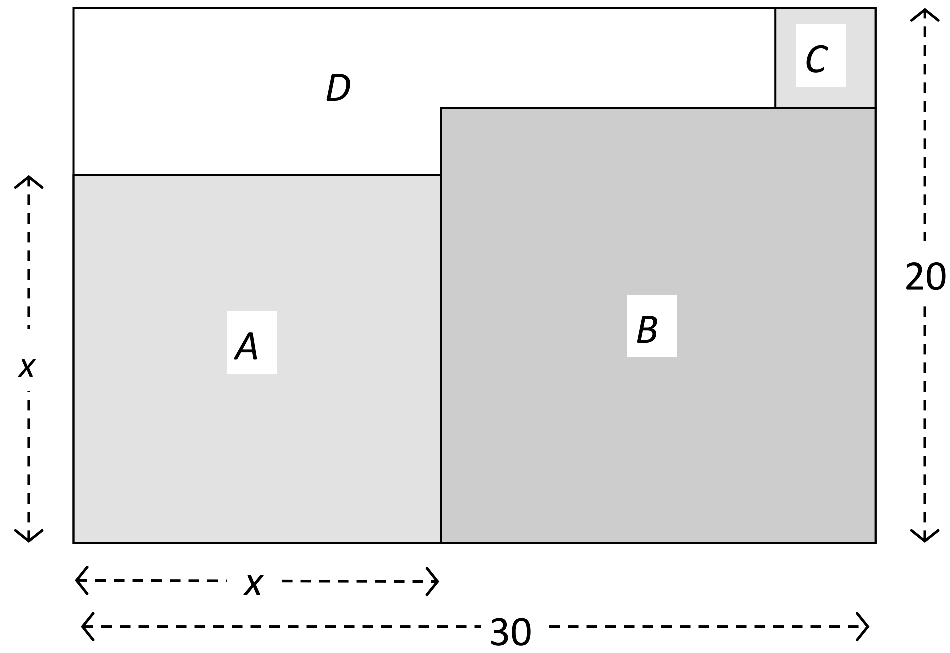
$600 - x^2 - (900 - 60x + x^2) - (x^2 - 20x + 100) = 600 - x^2 - 900 + 60x - x^2 - x^2 + 20x - 100 =$

2012 - I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten A, B en C, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we D.

De zijde van vierkant A noemen we x.



Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van D maximaal is.

Druk eerst de zijden van B en C uit in x.
de zijde van B is: $30 - x$ de zijde van C is: $20 - (30 - x) = x - 10$

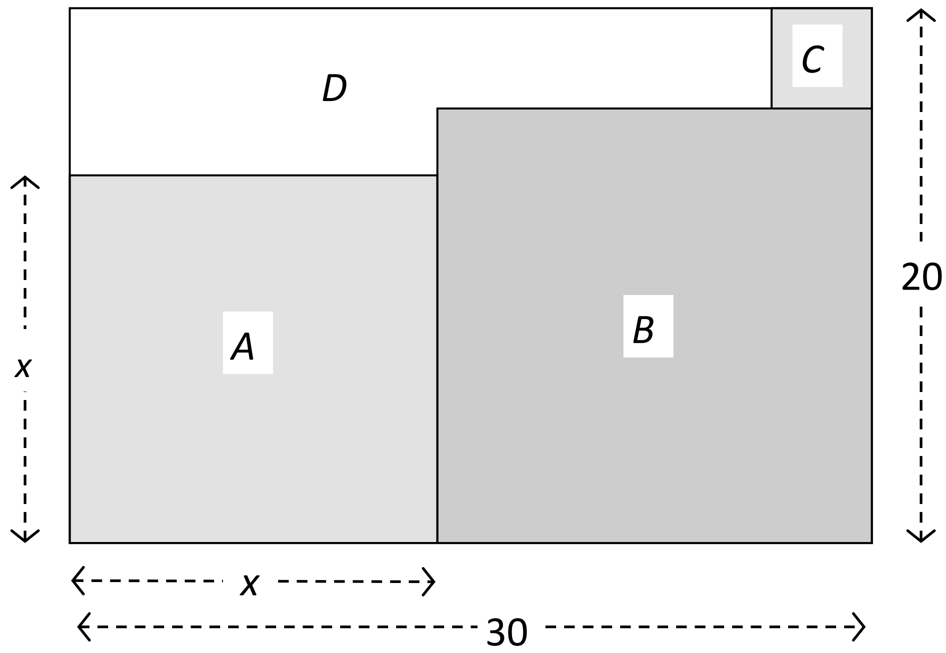
De oppervlakte van D is dus: $D(x) = 20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2 =$
$600 - x^2 - (900 - 60x + x^2) - (x^2 - 20x + 100) = 600 - x^2 - 900 + 60x - x^2 - x^2 + 20x - 100 =$
$-3x^2 + 80x - 400 = D(x)$. Deze oppervlakte is maximaal als:

2012 - I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.



Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.
de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

De oppervlakte van *D* is dus: $D(x) = 20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2 =$
$600 - x^2 - (900 - 60x + x^2) - (x^2 - 20x + 100) = 600 - x^2 - 900 + 60x - x^2 - x^2 + 20x - 100 =$
$-3x^2 + 80x - 400 = D(x)$. Deze oppervlakte is maximaal als: $D'(x) = 0$

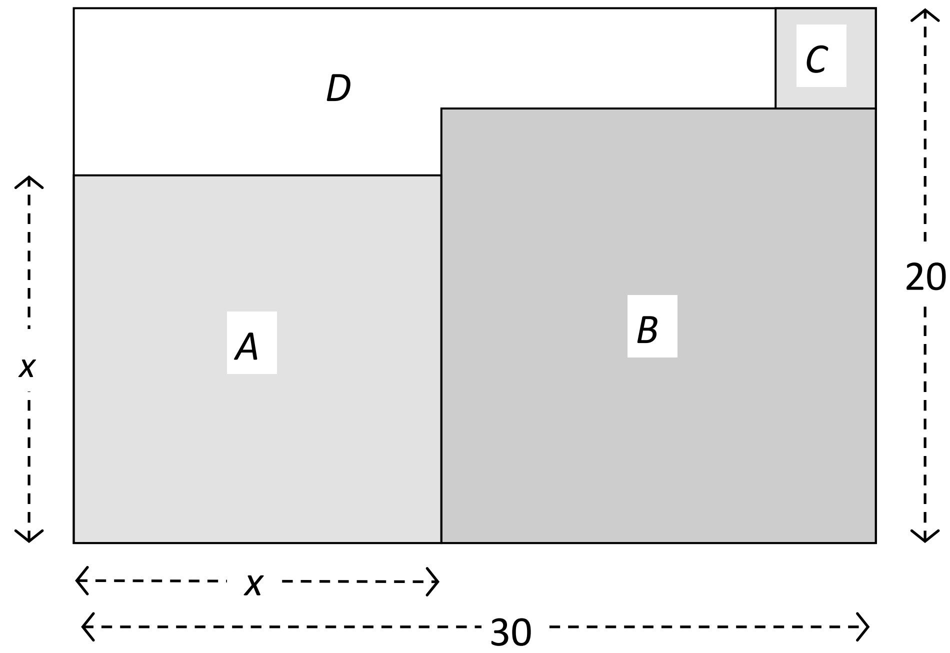
Differentiëren geeft:

2012 - I Vierkanten

Binnen een rechthoek van 20 bij 30 liggen de vierkanten *A*, *B* en *C*, met de zijden tegen elkaar aan (zie figuur).

Het overblijvende deel noemen we *D*.

De zijde van vierkant *A* noemen we x.



Vraag 10. Bereken de exacte waarde van x waarvoor de oppervlakte van *D* maximaal is.

Druk eerst de zijden van *B* en *C* uit in x.
de zijde van *B* is: $30 - x$ de zijde van *C* is: $20 - (30 - x) = x - 10$

De oppervlakte van *D* is dus: $D(x) = 20 \cdot 30 - x^2 - (30 - x)^2 - (x - 10)^2 =$
$600 - x^2 - (900 - 60x + x^2) - (x^2 - 20x + 100) = 600 - x^2 - 900 + 60x - x^2 - x^2 + 20x - 100 =$
$-3x^2 + 80x - 400 = D(x)$. Deze oppervlakte is maximaal als: $D'(x) = 0$

Differentiëren geeft: $-6x + 80 = 0$ met de exacte oplossing: $x = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

Intermezzo

De standaard vergelijkingen voor sinus en cosinus zijn:

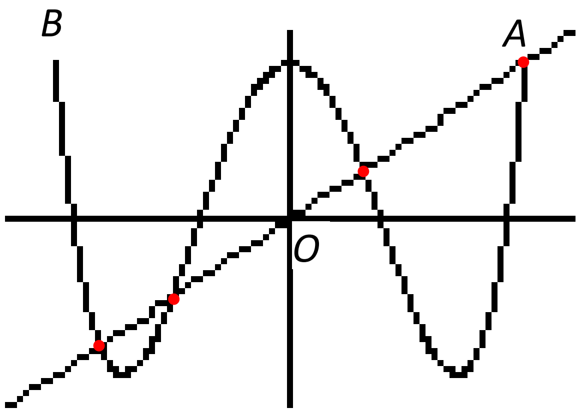
$$\sin A = \sin B \quad \begin{cases} A = B + k\cdot 2\pi \\ A = (\pi - B) + k\cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\cos A = \cos B \quad \begin{cases} A = B + k\cdot 2\pi \\ A = -B + k\cdot 2\pi \end{cases}$$

2012 – I   Goniometrie

Punt *P* beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

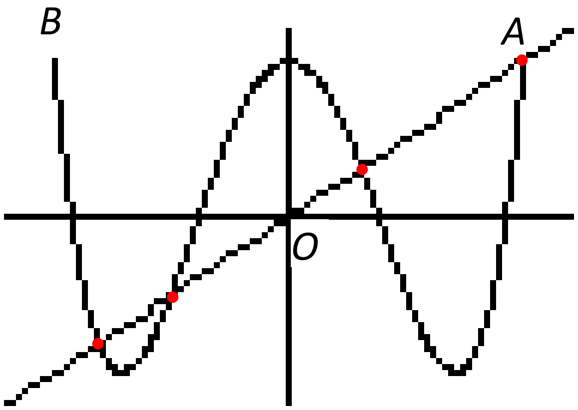


Hierbij zijn *x* en *y* in meters, *t* in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start *P* in *A*(1, 1) en op $t = 15$ is *P* in *B*(-1, 1).
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt *P* zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

2012 – I Goniometrie



Punt *P* beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

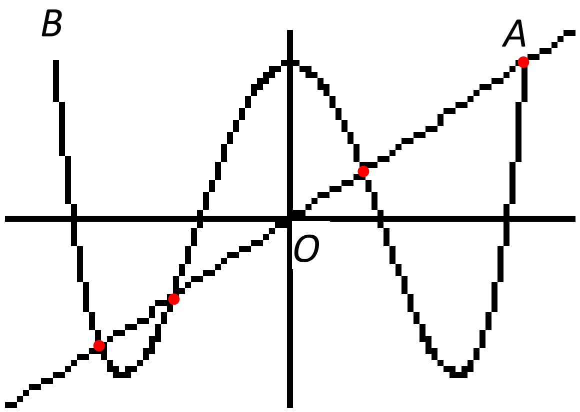
Hierbij zijn *x* en *y* in meters, *t* in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start *P* in *A*(1, 1) en op $t = 15$ is *P* in *B*(-1, 1).
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt *P* zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

Stel $x\,(t) = y\,(t)$

2012 – I Goniometrie



Punt P beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

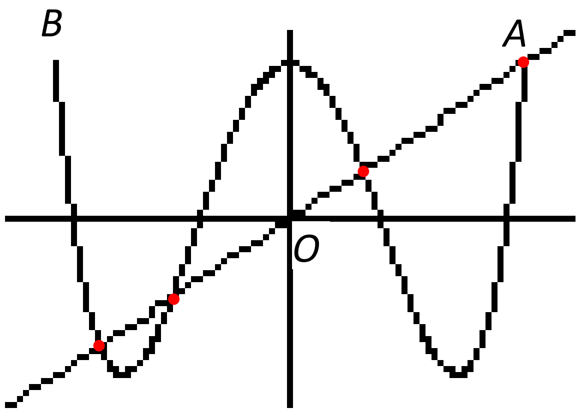
Hierbij zijn x en y in meters, t in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start P in $A(1, 1)$ en op $t = 15$ is P in $B(-1, 1)$.
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt P zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

2012 – I   Goniometrie



Punt *P* beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn *x* en *y* in meters, *t* in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start *P* in *A*(1, 1) en op $t = 15$ is *P* in *B*(-1, 1).
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

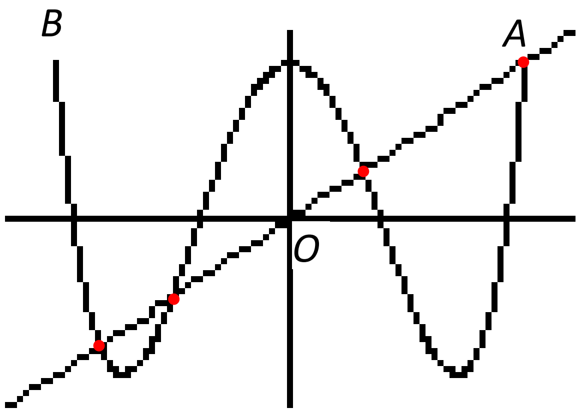
Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt *P* zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

2012 – I   Goniometrie



Punt *P* beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn *x* en *y* in meters, *t* in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start *P* in *A*(1, 1) en op $t = 15$ is *P* in *B*(-1, 1).
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt *P* zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

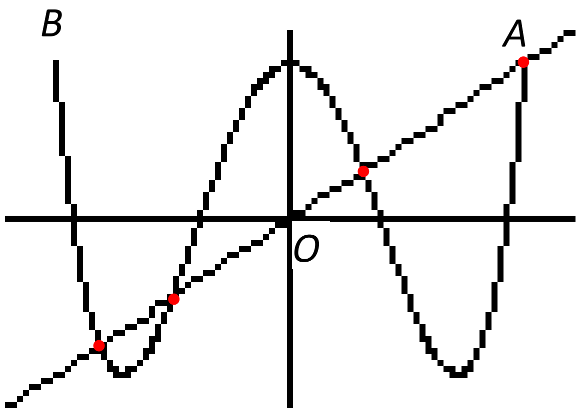
$\times \frac{15}{\pi}$

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\pi t}{15} = -\frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

2012 - I   Goniometrie



Punt *P* beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn *x* en *y* in meters, *t* in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start *P* in *A*(1, 1) en op $t = 15$ is *P* in *B*(-1, 1).
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt *P* zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

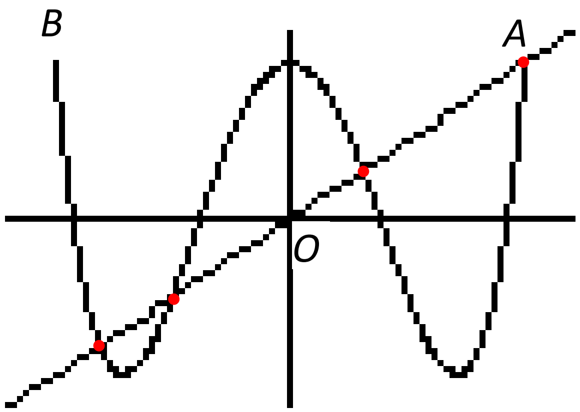
$\times \frac{15}{\pi}$

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = 4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10k$$

$$\frac{\pi t}{15} = -\frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow$$

2012 – I   Goniometrie



Punt *P* beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn *x* en *y* in meters, *t* in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start *P* in *A*(1, 1) en op $t = 15$ is *P* in *B*(-1, 1).
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt *P* zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

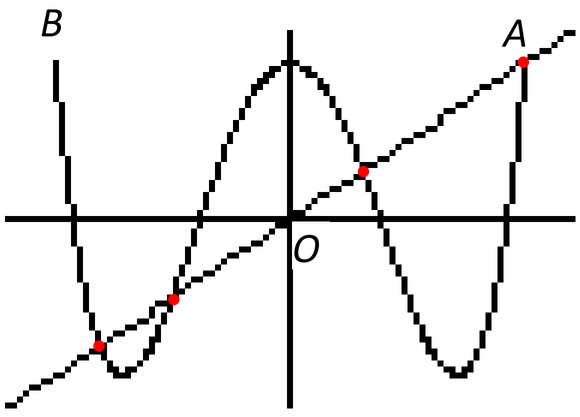
Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = 4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10k$$

$$\frac{\pi t}{15} = -\frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = \text{-}4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 6k$$

2012 – I   Goniometrie



Punt P beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meters, t in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start P in $A(1, 1)$ en op $t = 15$ is P in $B(-1, 1)$.
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt P zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

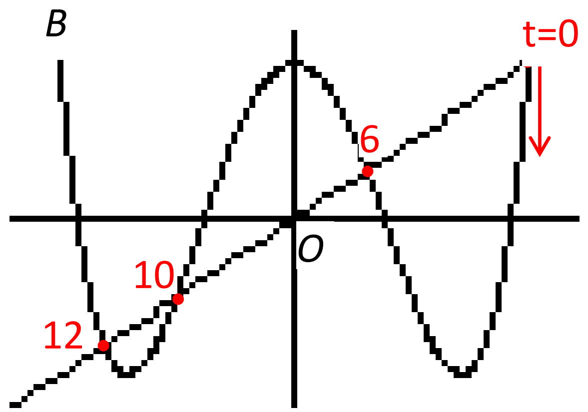
$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = 4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10k$$

$$\frac{\pi t}{15} = -\frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = -4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 6k$$

Uit de bovenste regel volgen de oplossingen:
Uit de onderste regel volgen de oplossingen:

2012 - I Goniometrie



Punt P beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meters, t in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start P in $A(1, 1)$ en op $t = 15$ is P in $B(-1, 1)$.
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt P zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

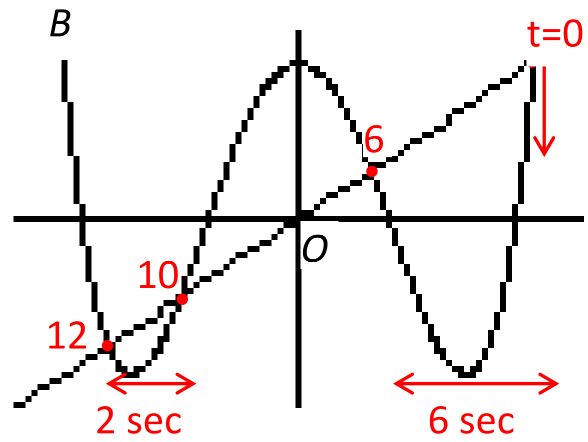
$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = 4t + k \cdot 30 \Leftrightarrow t = 10k$$

$$\frac{\pi t}{15} = -\frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow t = -4t + k \cdot 30 \Leftrightarrow t = 6k$$

Uit de bovenste regel volgen de oplossingen: t = 0, 10, 20, . . .
Uit de onderste regel volgen de oplossingen: t = 0, 6, 12, 18, . . .

P bevindt zich dus seconden onder de lijn $y = x$.

2012 - I Goniometrie



Punt P beweegt volgens de vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meters, t in seconden en $t \geq 0$.
Op $t = 0$ start P in $A(1, 1)$ en op $t = 15$ is P in $B(-1, 1)$.
In de figuur is ook nog de lijn $y = x$ getekend.

Gedurende het tijdsinterval [0, 15] bevindt P zich een aantal seconden onder de lijn $y = x$.

Vraag 11. Bereken dit aantal seconden

$$\cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t)$$

$$\frac{\pi t}{15} = \frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = 4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 10k$$

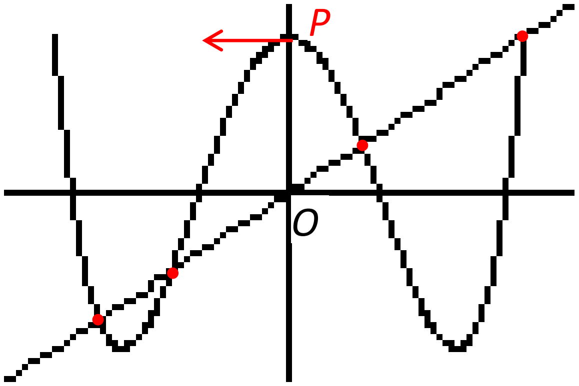
$$\frac{\pi t}{15} = -\frac{4\pi t}{15} + k \cdot 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad t = -4t + k \cdot 30 \quad \Leftrightarrow \quad t = 6k$$

Uit de bovenste regel volgen de oplossingen: $t = 0, 10, 20, \ldots$
Uit de onderste regel volgen de oplossingen: $t = 0, 6, 12, 18, \ldots$

P bevindt zich dus 6 + 2 = 8 seconden onder de lijn $y = x$.

2012 – I   Goniometrie

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

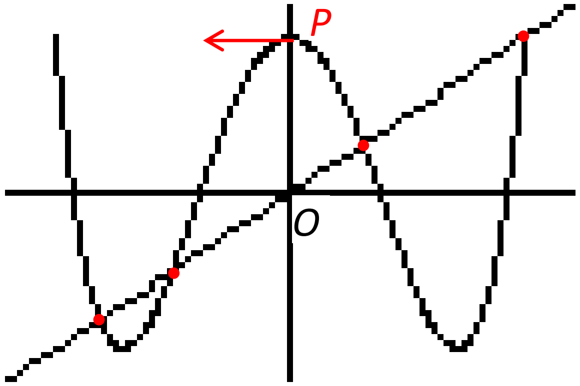


Op zeker moment passeert *P* de *y*-as.
daarbij neemt de *x*-coördinaat van *P* af.

Vraag 12. Bereken exact de snelheid van de *x*-coördinaat op dit moment.

2012 – I Goniometrie

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$



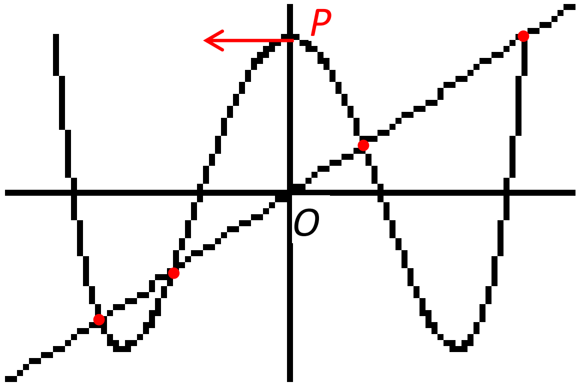
Op zeker moment passeert P de y-as.
daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

Vraag 12. Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat op dit moment.

- Op de y-as is $x_P = 0$ dus: $\cos(\frac{\pi}{15} t) = 0$ dus

2012 - I Goniometrie

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$



Op zeker moment passeert P de y-as.
daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

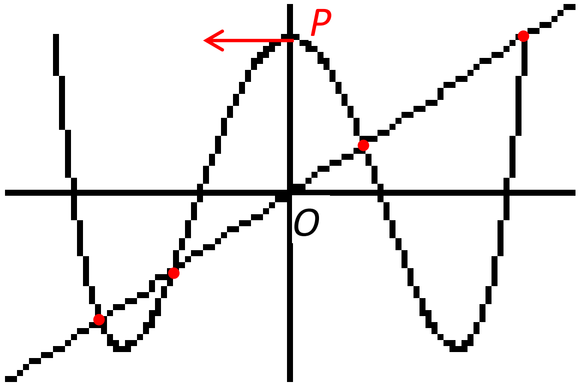
Vraag 12. Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat op dit moment.

- Op de y-as is $x_P = 0$ dus: $\cos(\frac{\pi}{15} t) = 0$ dus $\frac{\pi}{15} t = \frac{1}{2}\pi$ dus $t = 7\frac{1}{2}$

- De snelheid in de x-richting is dan:

2012 - I Goniometrie

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$



Op zeker moment passeert P de y-as.
daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

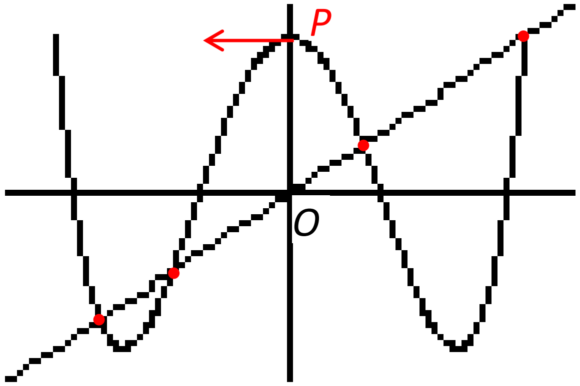
Vraag 12. Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat op dit moment.

- Op de y-as is $x_P = 0$ dus: $\cos(\frac{\pi}{15}t) = 0$ dus $\frac{\pi}{15}t = \frac{1}{2}\pi$ dus $t = 7\frac{1}{2}$
- De snelheid in de x-richting is dan: $x'(t) = -(\sin(\frac{\pi}{15}t)) \cdot \frac{\pi}{15}$
- Na 7,5 seconden is de snelheid:

kettingregel

2012 - I Goniometrie

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$



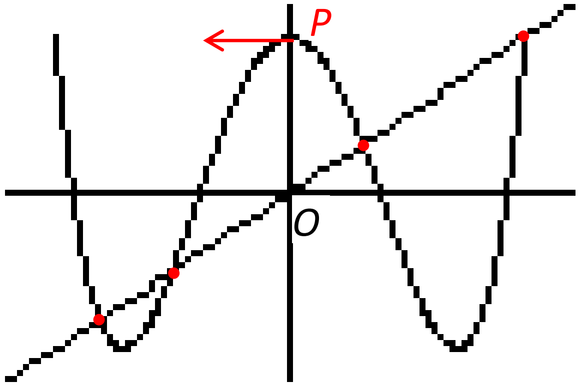
Op zeker moment passeert P de y-as.
daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

Vraag 12. Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat op dit moment.

- Op de y-as is $x_P = 0$ dus: $\cos(\frac{\pi}{15} t) = 0$ dus $\frac{\pi}{15} t = \frac{1}{2}\pi$ dus $t = 7\frac{1}{2}$
- De snelheid in de x-richting is dan: $x'(t) = -(\sin(\frac{\pi}{15} t)) \cdot \frac{\pi}{15}$
- Na 7,5 seconden is de snelheid: $x'(7\frac{1}{2}) = -(\sin(\frac{7\frac{1}{2}\pi}{15})) \cdot \frac{\pi}{15} = -(\sin(\frac{1}{2}\pi)) \cdot \frac{\pi}{15} = -\frac{\pi}{15}$
- Dus de gevraagde snelheid is exact:

2012 - I Goniometrie

$$\begin{cases} x(t) = \cos(\frac{\pi}{15} \cdot t) \\ y(t) = \cos(\frac{4\pi}{15} \cdot t) \end{cases}$$

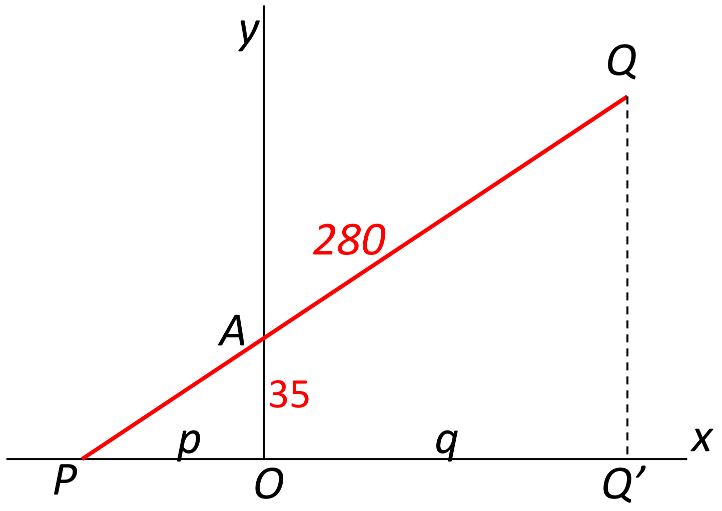


Op zeker moment passeert P de y-as.
daarbij neemt de x-coördinaat van P af.

Vraag 12. Bereken exact de snelheid van de x-coördinaat op dit moment.

- Op de y-as is $x_P = 0$ dus: $\cos(\frac{\pi}{15}t) = 0$ dus $\frac{\pi}{15}t = \frac{1}{2}\pi$ dus $t = 7\frac{1}{2}$
- De snelheid in de x-richting is dan: $x'(t) = -(\sin(\frac{\pi}{15}t)) \cdot \frac{\pi}{15}$
- Na 7,5 seconden is de snelheid: $x'(7\frac{1}{2}) = -(\sin(\frac{7\frac{1}{2}\pi}{15})) \cdot \frac{\pi}{15} = -(\sin(\frac{1}{2}\pi)) \cdot \frac{\pi}{15} = -\frac{\pi}{15}$
- Dus de gevraagde snelheid is exact: $(-)\frac{1}{15}\pi$ (m/s)

2012 – I Verschoven plank

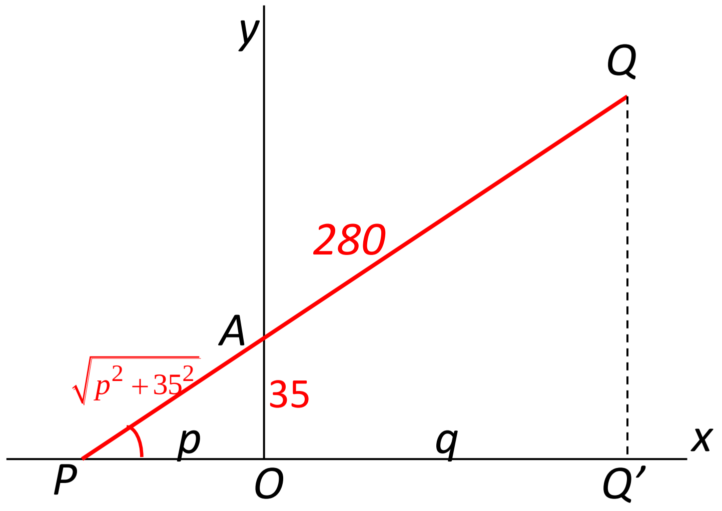


Samengevatte context:

Een plank met lengte 280 cm wordt over een muurtje gelegd van 35 cm hoogte. Zie de figuur: p en q zijn de horizontale afstanden van het muurtje tot de uiteinden van de plank. De vraag is, hoe ver de plank maximaal uitsteekt (q).

Vraag 13. Toon aan, met behulp van gelijkvormige driehoeken: $q = \dfrac{280\,p}{\sqrt{p^2 + 1225}} - p$

2012 – I Verschoven plank



Samengevatte context:

Een plank met lengte 280 cm wordt over een muurtje gelegd van 35 cm hoogte. Zie de figuur: *p* en *q* zijn de horizontale afstanden van het muurtje tot de uiteinden van de plank. De vraag is, hoe ver de plank maximaal uitsteekt (*q*).

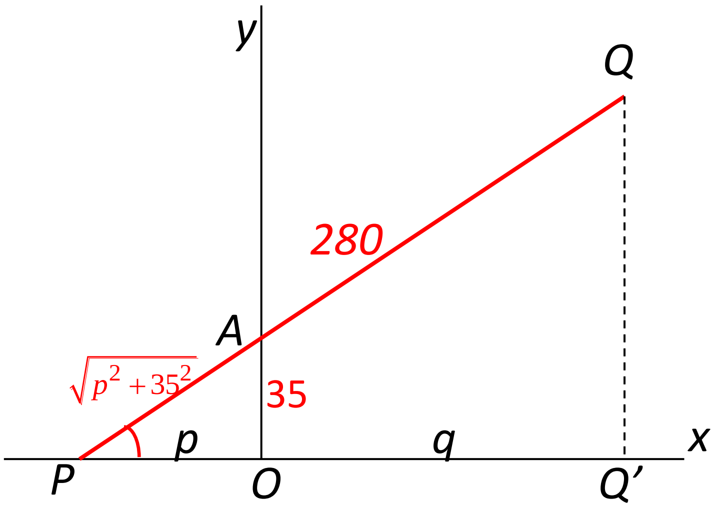
Vraag 13. Toon aan, met behulp van gelijkvormige driehoeken: $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$

Bekijk de cosinus van de hellingshoek $\cos \angle APO$ in twee driehoeken:

2012 – I Verschoven plank

Samengevatte context:

Een plank met lengte 280 cm wordt over een muurtje gelegd van 35 cm hoogte. Zie de figuur: *p* en *q* zijn de horizontale afstanden van het muurtje tot de uiteinden van de plank. De vraag is, hoe ver de plank maximaal uitsteekt (*q*).

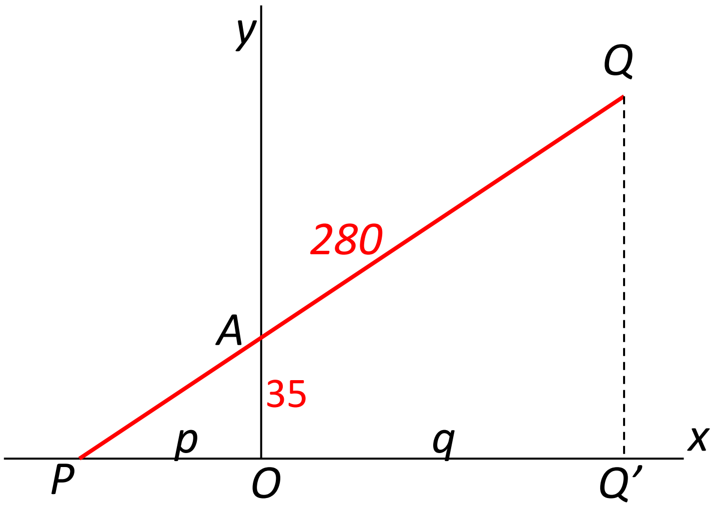


Vraag 13. Toon aan, met behulp van gelijkvormige driehoeken: $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$

Bekijk de cosinus van de hellingshoek cos $\angle APO$ in twee driehoeken:

$$\cos \angle APO = \frac{p}{\sqrt{p^2+35^2}} = \frac{p+q}{280}$$

2012 – I Verschoven plank



Samengevatte context:

Een plank met lengte 280 cm wordt over een muurtje gelegd van 35 cm hoogte. Zie de figuur: p en q zijn de horizontale afstanden van het muurtje tot de uiteinden van de plank. De vraag is, hoe ver de plank maximaal uitsteekt (q).

Vraag 13. Toon aan, met behulp van gelijkvormige driehoeken: $q = \dfrac{280\,p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$

Bekijk de cosinus van de hellingshoek $\cos\angle APO$ in twee driehoeken:

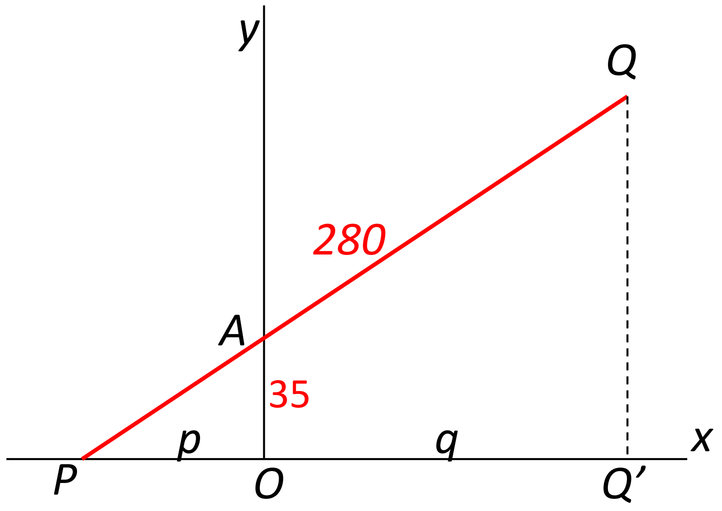
$$\cos\angle APO = \frac{p}{\sqrt{p^2+35^2}} \quad = \quad \frac{p+q}{280}$$

Uitwerken tot: $\dfrac{280\,p}{\sqrt{p^2+35^2}} \quad = \quad p+q$

2012 - I Verschoven plank

Samengevatte context:

Een plank met lengte 280 cm wordt over een muurtje gelegd van 35 cm hoogte. Zie de figuur: p en q zijn de horizontale afstanden van het muurtje tot de uiteinden van de plank. De vraag is, hoe ver de plank maximaal uitsteekt (q).



Vraag 13. Toon aan, met behulp van gelijkvormige driehoeken: $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$

Bekijk de cosinus van de hellingshoek $\cos \angle APO$ in twee driehoeken:

$$\cos \angle APO = \frac{p}{\sqrt{p^2+35^2}} = \frac{p+q}{280}$$

Uitwerken tot: $\dfrac{280p}{\sqrt{p^2+35^2}} = p+q$ dus $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$

2012 – I   Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel, als volgt:

2012 – I   Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel, als volgt:

$$q'(p) = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p\cdot\dfrac{1\cdot\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{p^2+1225}}}{(\sqrt{p^2+1225})^2} - 1 = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - \dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225} - 1$$

2012 – I   Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel, als volgt:

$$q'(p) = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p\cdot\dfrac{1\cdot\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{p^2+1225}}}{(\sqrt{p^2+1225})^2} - 1 = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - \dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225} - 1$$

Vermenigvuldig de teller en noemer met $\sqrt{p^2+1225}$:

2012 – I   Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel, als volgt:

$$q'(p) = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p\cdot\dfrac{1\cdot\cancel{2}\,p}{\cancel{2}\sqrt{p^2+1225}}}{(\sqrt{p^2+1225})^2} - 1 = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - \dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225} - 1$$

Vermenigvuldig de teller en noemer met $\sqrt{p^2+1225}$:

$$\frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - \dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225}\cdot\frac{\sqrt{p^2+1225}}{\sqrt{p^2+1225}} - 1 = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225}\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1$$

2012 – I   Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel, als volgt:

$$q'(p) = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p\cdot\dfrac{1\cdot\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{p^2+1225}}}{(\sqrt{p^2+1225})^2} - 1 = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - \dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225} - 1$$

Vermenigvuldig de teller en noemer met $\sqrt{p^2+1225}$:

$$\frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225} - \dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225}\cdot\frac{\sqrt{p^2+1225}}{\sqrt{p^2+1225}} - 1 = \frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225}\cdot\sqrt{p^2+1225} - 280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1$$

$$= \frac{280\cdot(p^2+1225) - 280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}} - 1 =$$

2012 - I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q=\dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}}-p$ volgt: $q'(p)=\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}}-1$

Gebruik de quotiëntregel en de kettingregel, als volgt:

$$q'(p)=\frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225}-280p\cdot\dfrac{1\cdot\cancel{2}p}{\cancel{2}\sqrt{p^2+1225}}}{(\sqrt{p^2+1225})^2}-1=\frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225}-\dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225}-1$$

Vermenigvuldig de teller en noemer met $\sqrt{p^2+1225}$:

$$\frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225}-\dfrac{280p^2}{\sqrt{p^2+1225}}}{p^2+1225}\cdot\frac{\sqrt{p^2+1225}}{\sqrt{p^2+1225}}-1=\frac{280\cdot\sqrt{p^2+1225}\cdot\sqrt{p^2+1225}-280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}}-1$$

$$=\quad\frac{280\cdot(p^2+1225)-280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}}-1=\frac{280\cdot p^2+343000-280p^2}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}}-1=\frac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{p^2+1225}}-1$$

2012 - I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft:

2012 – I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} = 1$

Uitwerken tot: $343000 =$

2012 - I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} = 1$

Uitwerken tot: $343000 = (p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

$$(p^2+1225)^1\cdot(p^2+1225)^{\frac{1}{2}} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$$

2012 - I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} = 1$

Uitwerken tot: $343000 = (p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

Dus $(p^2+1225)^{1\frac{1}{2}} = 343000$

$(p^2+1225)^1\cdot(p^2+1225)^{\frac{1}{2}} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

2012 – I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} = 1$

Uitwerken tot: $343000 = (p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)} = (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

Dus $(p^2+1225)^{1\frac{1}{2}} = 343000$

links en rechts tot de omgekeerde macht verheffen

En $\{(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{2}{3}} = 343000^{\frac{2}{3}} = 4900$

2012 - I   Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} = 1$

Uitwerken tot: $343000 = (p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

Dus $(p^2+1225)^{1\frac{1}{2}} = 343000$

En $\{(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{2}{3}} = 343000^{\frac{2}{3}} = 4900$

Conclusie: $(p^2+1225) = 4900$ dus $p^2 = 3675$ en $p = \sqrt{3675}$

2012 - I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q = \dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}} - p$ volgt: $q'(p) = \dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} - 1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}} = 1$

Uitwerken tot: $343000 = (p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

Dus $(p^2+1225)^{1\frac{1}{2}} = 343000$

En $\{(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{2}{3}} = 343000^{\frac{2}{3}} = 4900$

Conclusie: $(p^2+1225) = 4900$ dus $p^2 = 3675$ en $p = \sqrt{3675}$

$p = \sqrt{3675}$ invullen in q geeft maximale q is: $\dfrac{280\sqrt{3675}}{\sqrt{3675+1225}} - \sqrt{3675} =$

2012 - I Verschoven plank

Vraag 14. Toon aan, dat uit $q=\dfrac{280p}{\sqrt{p^2+1225}}-p$ volgt: $q'(p)=\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}}-1$

Vraag 15. Bereken exact het maximum van q.

De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{343000}{(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)}}=1$

Uitwerken tot: $343000=(p^2+1225)\cdot\sqrt{(p^2+1225)} \quad = \quad (p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}$

Dus $(p^2+1225)^{1\frac{1}{2}}=343000$

En $\{(p^2+1225)^{\frac{3}{2}}\}^{\frac{2}{3}}=343000^{\frac{2}{3}}=4900$

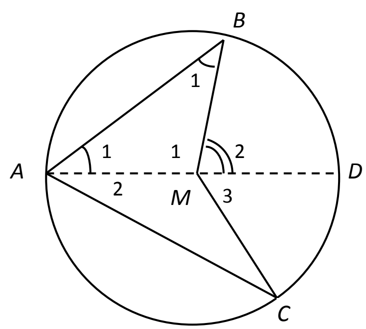
Conclusie: $(p^2+1225)=4900$ dus $p^2=3675$ en $p=\sqrt{3675}$

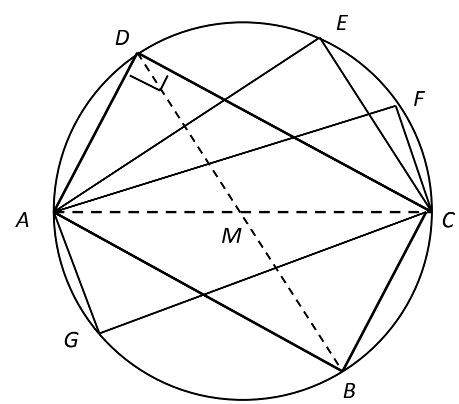
$p=\sqrt{3675}$ invullen in q geeft maximale q is: $\dfrac{280\sqrt{3675}}{\sqrt{3675+1225}}-\sqrt{3675}=\overbrace{\dfrac{280\sqrt{3675}}{70}}^{4\cdot\sqrt{3675}}-\overbrace{\sqrt{3675}}^{1\cdot\sqrt{3675}}=3\sqrt{3675}$

De stelling van Thales

Een omtrekshoek is de helft van de bijbehorende middelpuntshoek
Links: $\angle A_{12} = ½ \angle M_{23}$

Thales:
Een omtrekshoek die op een halve cirkelboog (middellijn) staat is dus de helft van 180^{o}.
Rechts: De omtrekshoeken bij *D*, *E*, enz. zijn 90^{o}.

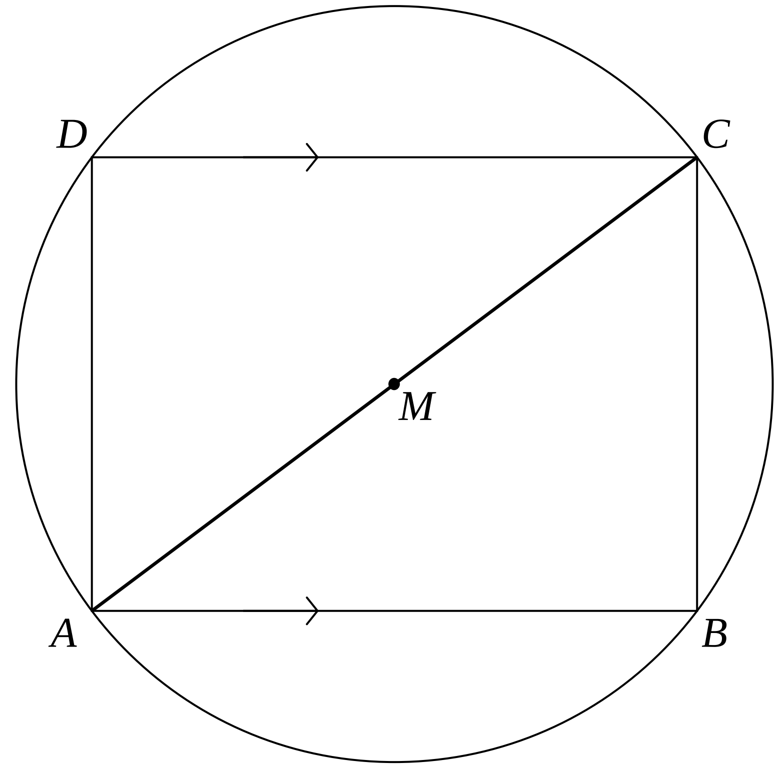




2012 – I Rechthoek

Op een cirkel met middelpunt M liggen A, B, C en D zo dat AC een middellijn is en AB // CD.

Vraag 16. Bewijs dat $ABCD$ een rechthoek is.



Bewijs:

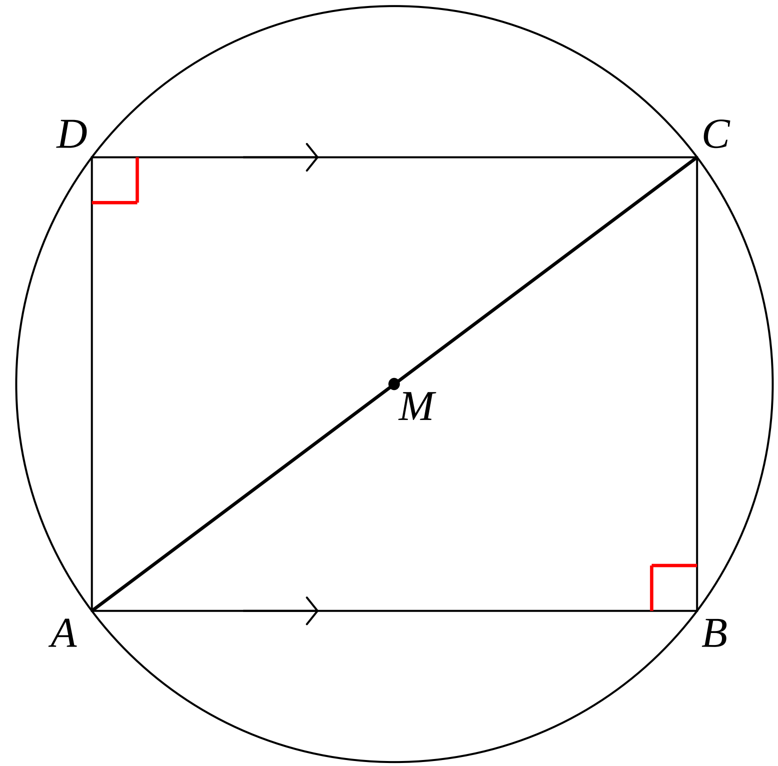
2012 – I Rechthoek

Op een cirkel met middelpunt *M* liggen *A*, *B*, *C* en *D* zo dat *AC* een middellijn is en *AB* // *CD*.

Vraag 16. Bewijs dat *ABCD* een rechthoek is.

Bewijs:

- $\angle B = \angle D = 90^{o}$ (*Thales*)



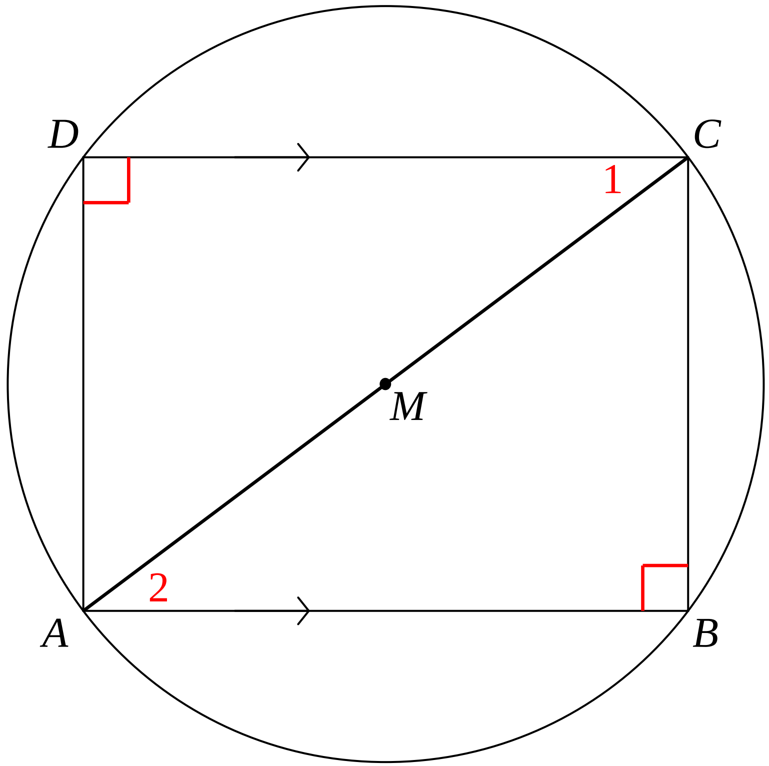
2012 – I Rechthoek

Op een cirkel met middelpunt *M* liggen *A*, *B*, *C* en *D* zo dat *AC* een middellijn is en *AB* // *CD*.

Vraag 16. Bewijs dat *ABCD* een rechthoek is.

Bewijs:

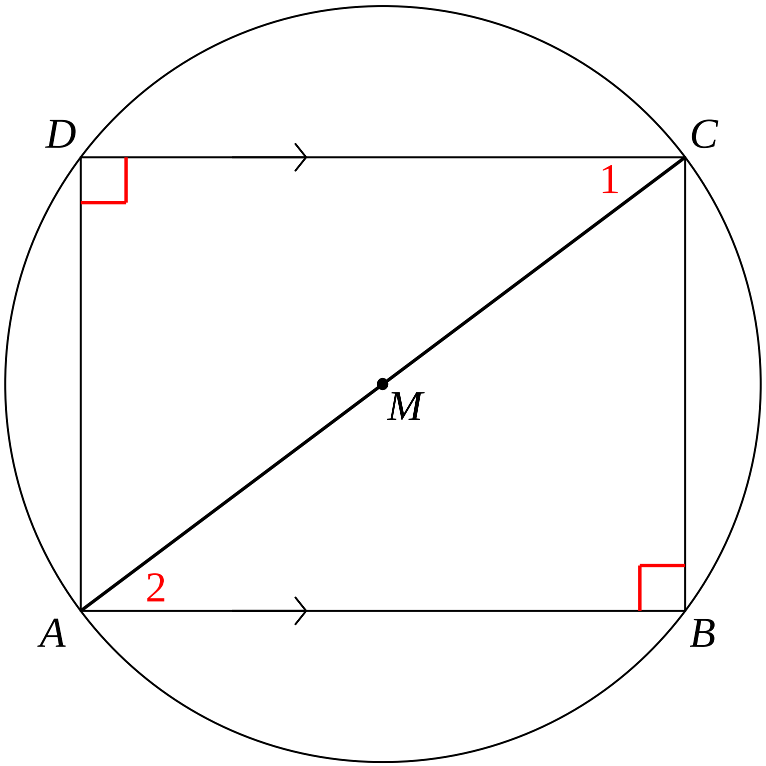
- $\angle B = \angle D = 90^{o}$ (*Thales*)
- $\angle A2 = \angle C1$ (*Z-hoeken*)



2012 – I Rechthoek

Op een cirkel met middelpunt *M* liggen *A*, *B*, *C* en *D* zo dat *AC* een middellijn is en *AB* // *CD*.

Vraag 16. Bewijs dat *ABCD* een rechthoek is.



Bewijs:

- $\angle B = \angle D = 90^{o}$ (*Thales*)
- $\angle A2 = \angle C1$ (*Z-hoeken*)
- $AC = AC$
- Dus $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (*ZHH*)

2012 – I Rechthoek

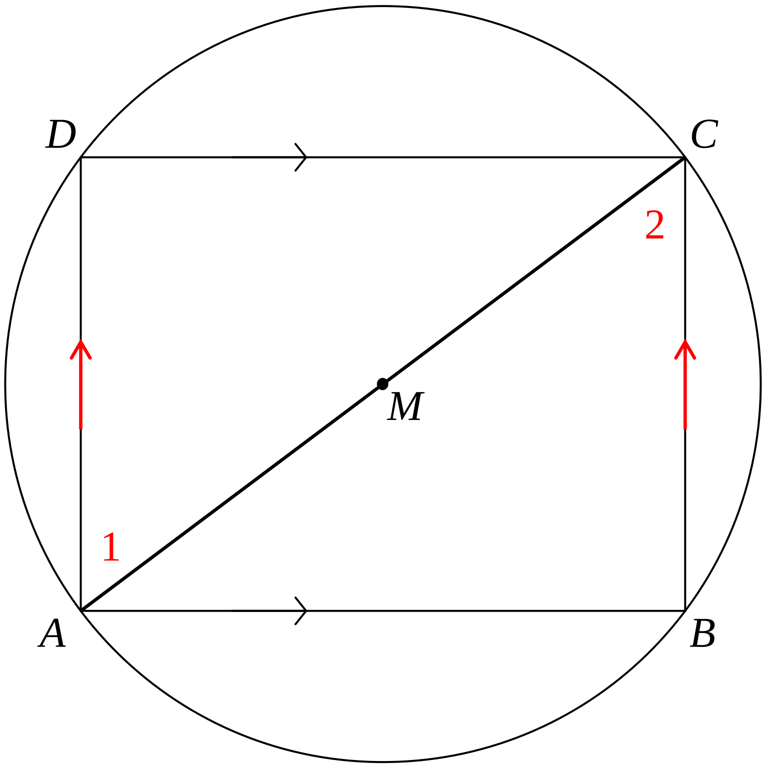
Op een cirkel met middelpunt *M* liggen *A*, *B*, *C* en *D* zo dat *AC* een middellijn is en *AB* // *CD*.

Vraag 16. Bewijs dat *ABCD* een rechthoek is.

Bewijs:

- $\angle B = \angle D = 90^{o}$ (*Thales*)
- $\angle A2 = \angle C1$ (*Z-hoeken*)
- *AC*=*AC*

- Dus $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (*ZHH*)
- Dus is ook $\angle A1 = \angle C2$
- En dus is *ABCD* een parallellogram vanwege *AD* // *BC* (*Z*-hoeken)



2012 – I Rechthoek

Op een cirkel met middelpunt M liggen A, B, C en D zo dat AC een middellijn is en AB // CD.

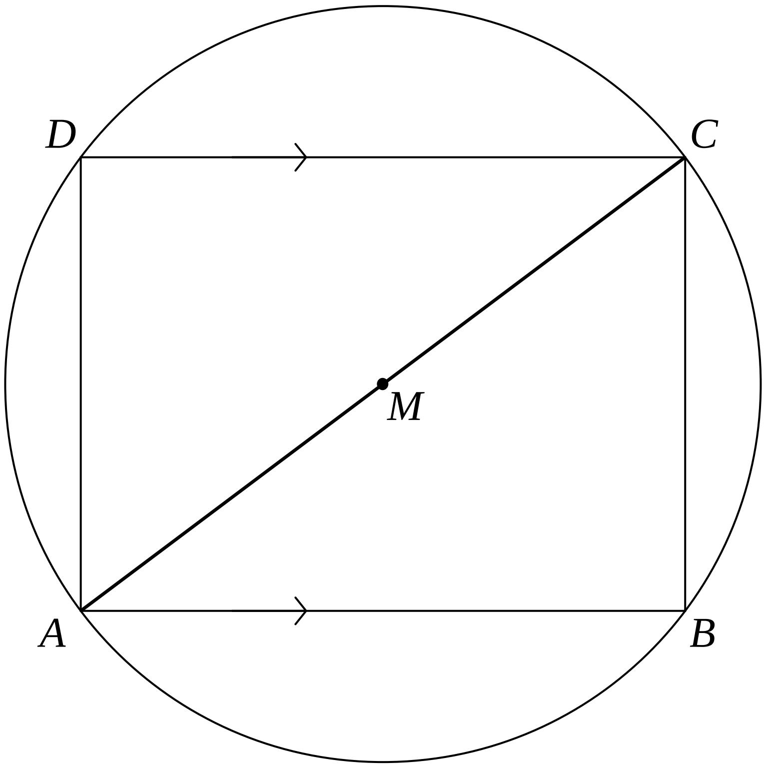
Vraag 16. Bewijs dat $ABCD$ een rechthoek is.

Bewijs:

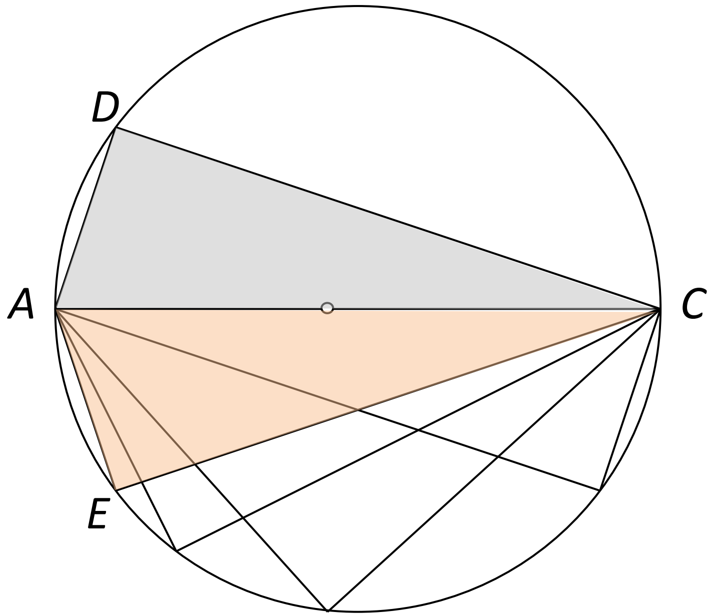
- $\angle B = \angle D = 90^{o}$ (*Thales*)
- $\angle A2 = \angle C1$ (*Z-hoeken*)
- $AC=AC$

- Dus $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ (*ZHH*)
- Dus is ook $\angle A1 = \angle C2$
- En dus is $ABCD$ een parallellogram vanwege AD // BC (Z-hoeken) (*) zie volgende scherm

- *ABCD* is een parallellogram met rechte hoeken dus een rechthoek.

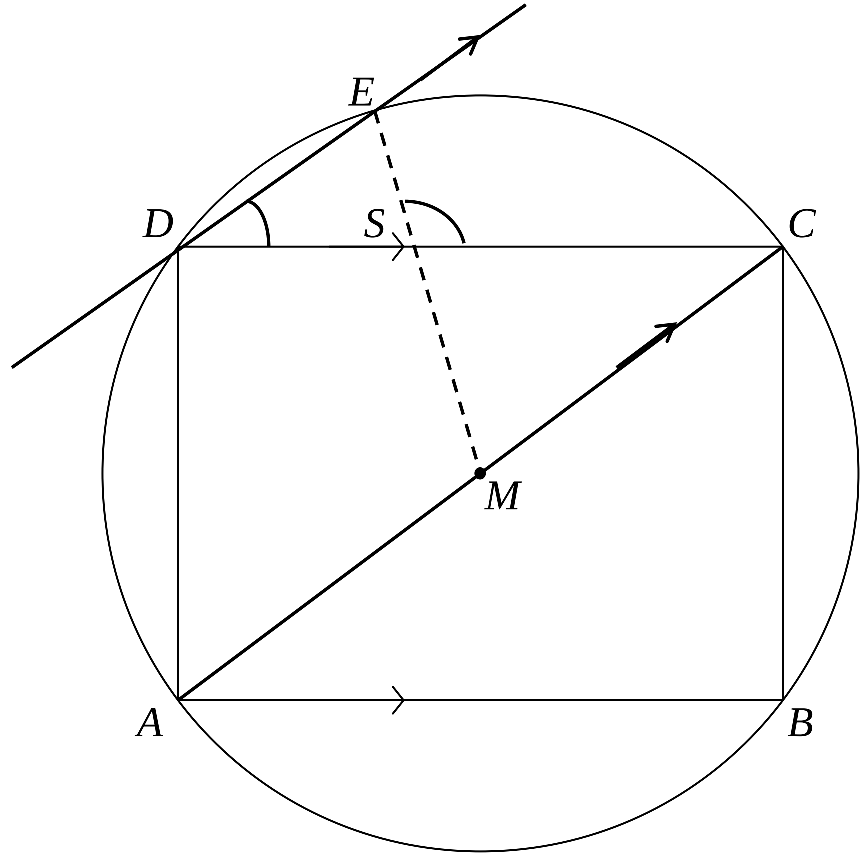


Voor het bewijs dat *ABCD* een rechthoek is, is de stelling van Thales nodig, maar niet voldoende.
In onderstaande figuur is een aantal rechthoekige driehoeken getekend die niet met driehoek *ACD* samen een rechthoek vormen maar wel aan de stelling van Thales voldoen. Een van die driehoeken is zelfs ook nog congruent met driehoek *ACD* (driehoek *AEC*). *Je hebt dus de evenwijdigheid nog nodig van het andere paar rechthoekszijden.*



2012 – I Rechthoek

Door *D* trekken we een lijn *l* evenwijdig aan *AC*.
Lijn *l* snijdt de cirkel behalve in *D* ook in *E*.
Het snijpunt van *ME* en *CD* is *S*.



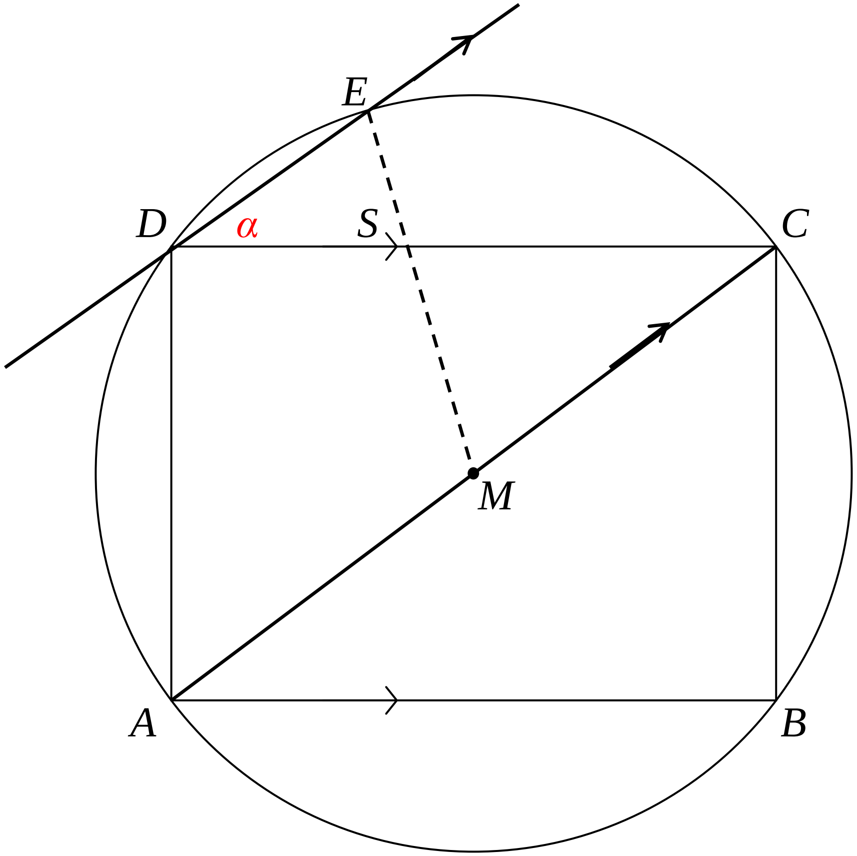
Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.

Bewijs:

2012 – I Rechthoek

Door D trekken we een lijn l evenwijdig aan AC.
Lijn l snijdt de cirkel behalve in D ook in E.
Het snijpunt van ME en CD is S.

Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.



Bewijs: • Noem $\angle EDC = \alpha$

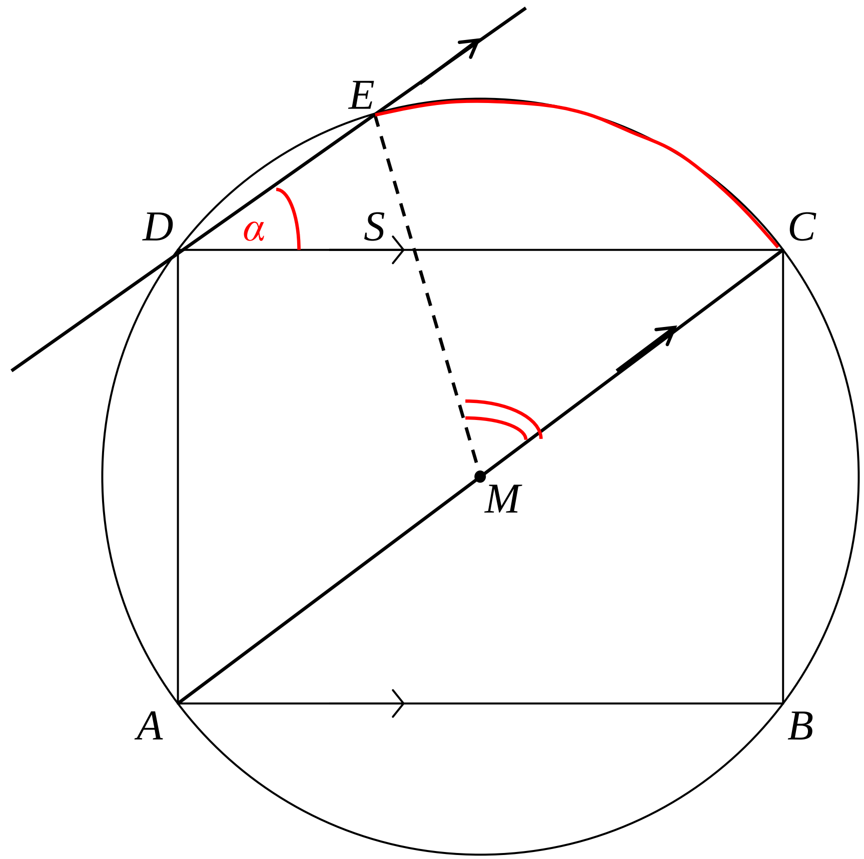
2012 – I   Rechthoek

Door *D* trekken we een lijn *l* evenwijdig aan *AC*.
Lijn *l* snijdt de cirkel behalve in *D* ook in *E*.
Het snijpunt van *ME* en *CD* is *S*.

Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.

Bewijs: • Noem $\angle EDC = \alpha$

- $\angle EDC$ staat op boog *EC*
- Middelpuntshoek *EMC* staat ook op boog *EC*



2012 – I Rechthoek

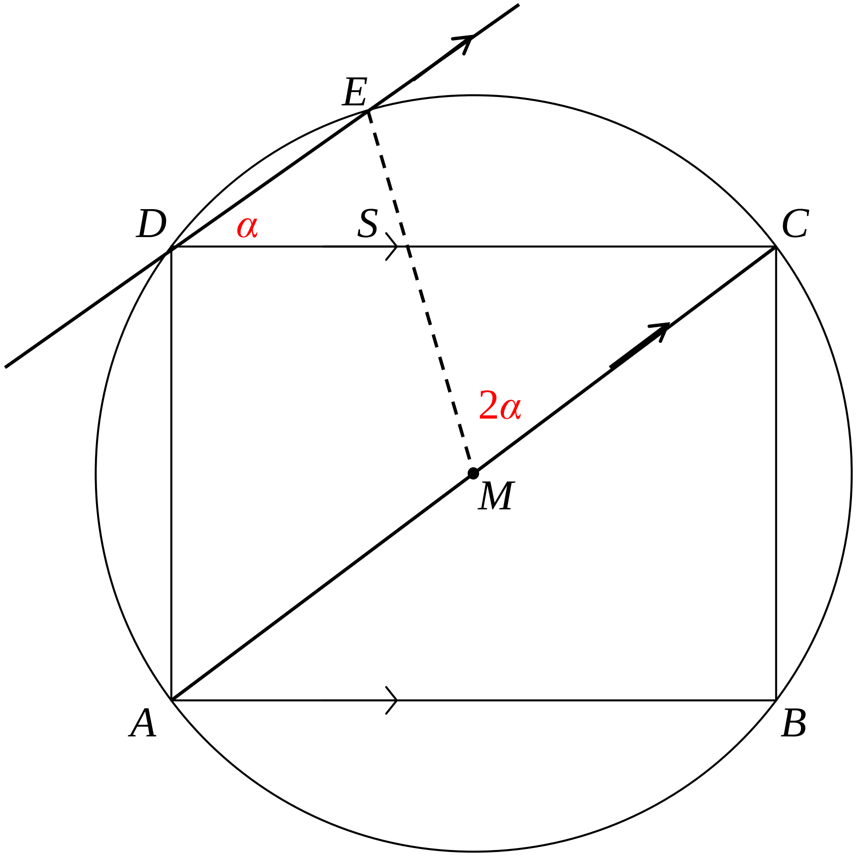
Door D trekken we een lijn l evenwijdig aan AC.
Lijn l snijdt de cirkel behalve in D ook in E.
Het snijpunt van ME en CD is S.

Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.

Bewijs: • Noem $\angle EDC = \alpha$

- $\angle EDC$ staat op boog EC
- Middelpuntshoek EMC staat ook op boog EC

- Dus $\angle EMC = 2\alpha$



2012 – I Rechthoek

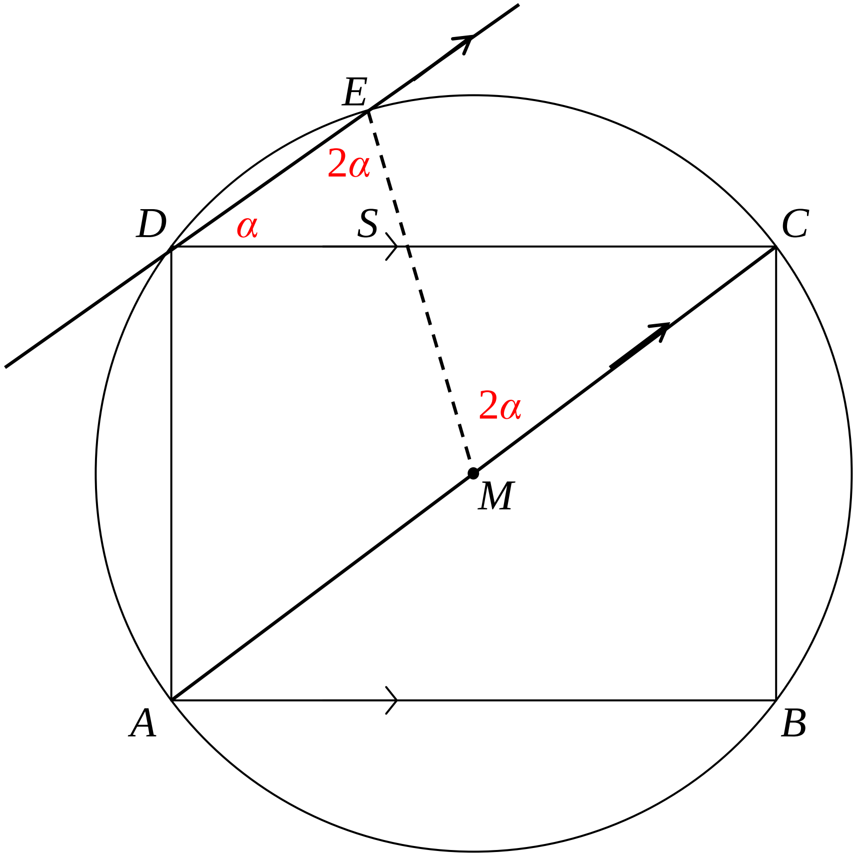
Door *D* trekken we een lijn *l* evenwijdig aan *AC*.
Lijn *l* snijdt de cirkel behalve in *D* ook in *E*.
Het snijpunt van *ME* en *CD* is *S*.

Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.

Bewijs: • Noem $\angle EDC = \alpha$

• $\angle EDC$ staat op boog *EC*
• Middelpuntshoek *EMC* staat ook op boog *EC*

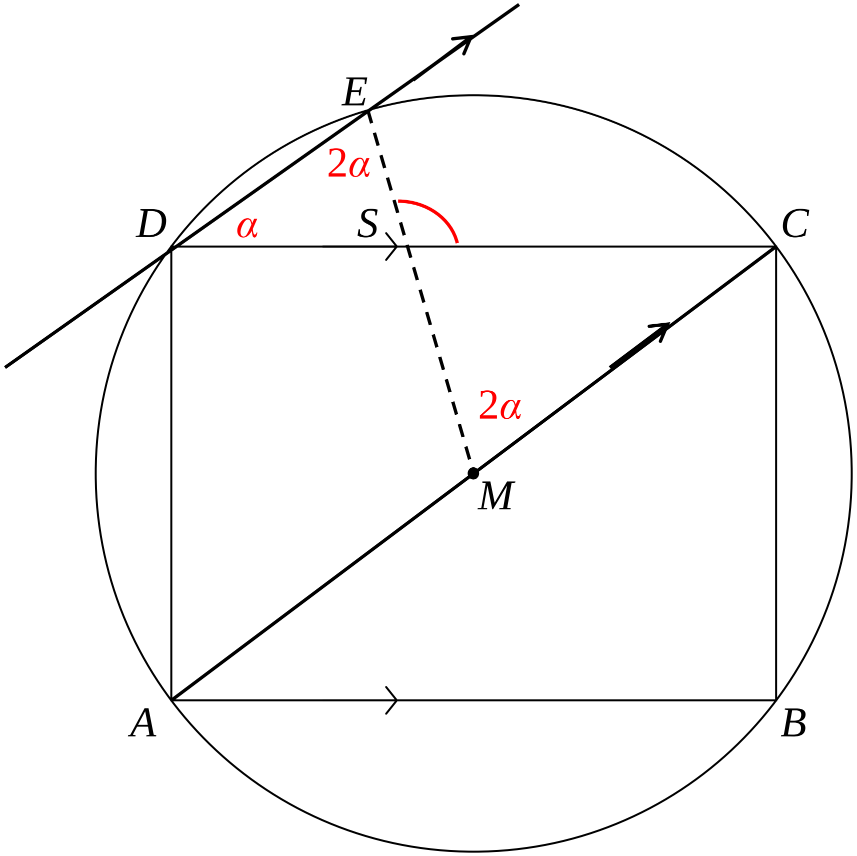
• Dus $\angle EMC = 2\alpha$
• $\angle DEM$ is ook 2α (*Z-hoeken*)



2012 – I   Rechthoek

Door *D* trekken we een lijn *l* evenwijdig aan *AC*.
Lijn *l* snijdt de cirkel behalve in *D* ook in *E*.
Het snijpunt van *ME* en *CD* is *S*.

Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.



Bewijs: • Noem $\angle EDC = \alpha$

- $\angle EDC$ staat op boog *EC*
- Middelpuntshoek *EMC* staat ook op boog *EC*

- Dus $\angle EMC = 2\alpha$
- $\angle DEM$ is ook 2α (*Z-hoeken*)

- $\angle CSE = \angle CDE + \angle DEM$ (*buitenhoek*)

2012 – I Rechthoek

Door *D* trekken we een lijn *l* evenwijdig aan *AC*.
Lijn *l* snijdt de cirkel behalve in *D* ook in *E*.
Het snijpunt van *ME* en *CD* is *S*.

Vraag 17. Bewijs dat $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.

Bewijs: • Noem $\angle EDC = \alpha$

- $\angle EDC$ staat op boog *EC*
- Middelpuntshoek *EMC* staat ook op boog *EC*

- Dus $\angle EMC = 2\alpha$
- $\angle DEM$ is ook 2α (*Z-hoeken*)

- $\angle CSE = \angle CDE + \angle DEM$ (*buitenhoek*)
- Dus $\angle CSE = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$

Dus $\angle CSE = 3 \cdot \angle CDE$.