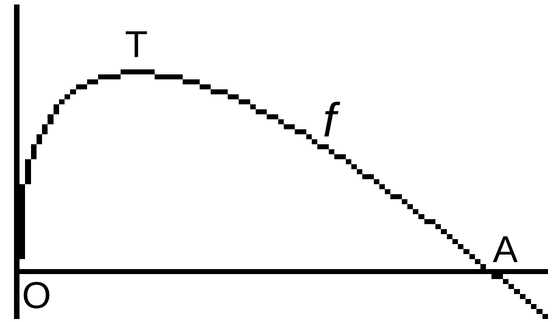
2014-II Gelijke oppervlakte



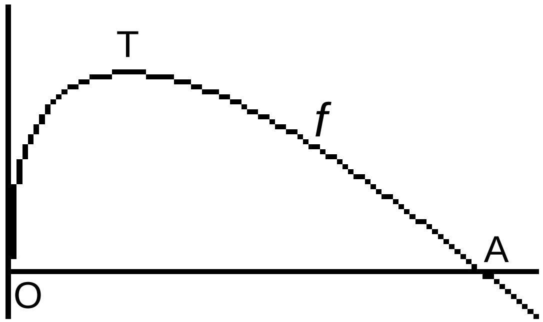
Gegeven de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x} - x$ met de punten $O(0, 0)$ en $A(9, 0)$ en de top T.

Vraag 1. Bewijs dat de coördinaten van T $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})$ zijn.

Afgeleide nul stellen

geeft:

2014-II Gelijke oppervlakte



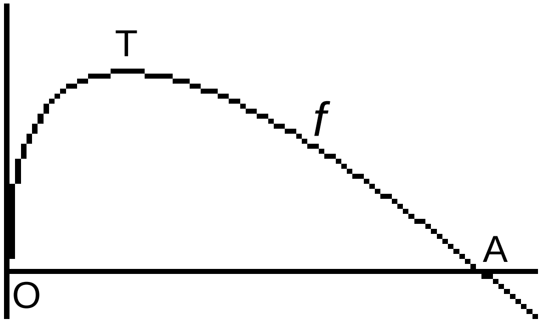
Gegeven de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x} - x$ met de punten $O(0, 0)$ en $A(9, 0)$ en de top T.

Vraag 1. Bewijs dat de coördinaten van T $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})$ zijn.

Afgeleide nul stellen

geeft: $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ dus

2014-II Gelijke oppervlakte



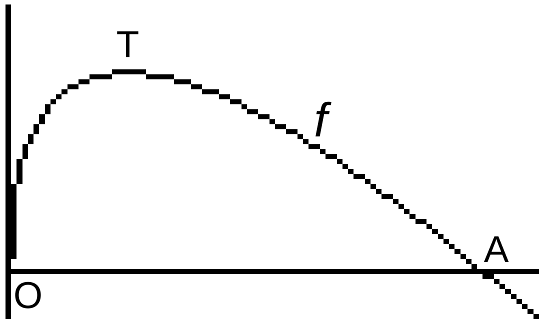
Gegeven de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x} - x$ met de punten O (0, 0) en A (9, 0) en de top T.

Vraag 1. Bewijs dat de coördinaten van T $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})$ zijn.

Afgeleide nul stellen

geeft: $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ dus $2\sqrt{x} = 3$

2014-II Gelijke oppervlakte



Gegeven de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x} - x$ met de punten $O\,(0, 0)$ en $A\,(9, 0)$ en de top T.

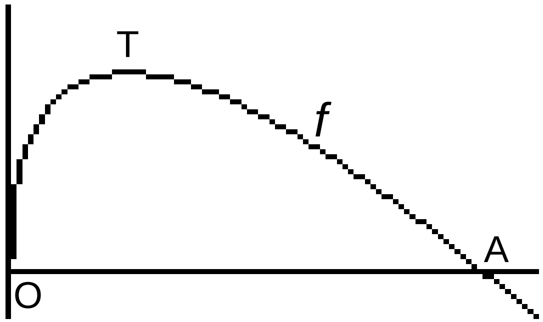
Vraag 1. Bewijs dat de coördinaten van T $(2\tfrac{1}{4}\,,\ 2\tfrac{1}{4})$ zijn.

Afgeleide nul stellen

geeft: $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ dus $2\sqrt{x} = 3$ dus $x = 2\tfrac{1}{4}$ met $y = \ldots$

$\frac{9}{4}$

2014-II Gelijke oppervlakte



Gegeven de grafiek van de functie $f(x) = 3\sqrt{x} - x$ met de punten $O(0, 0)$ en $A(9, 0)$ en de top T.

Vraag 1. Bewijs dat de coördinaten van T $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})$ zijn.

Afgeleide nul stellen

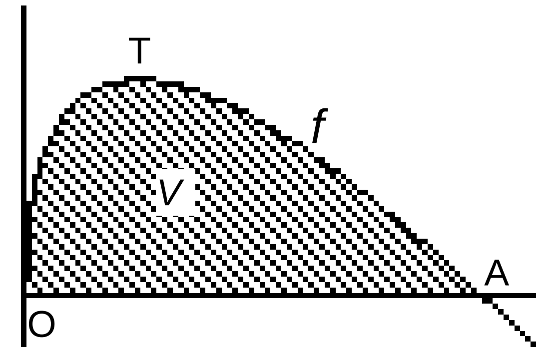
geeft: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$ dus $2\sqrt{x} = 3$ dus $x = 2\frac{1}{4}$ met

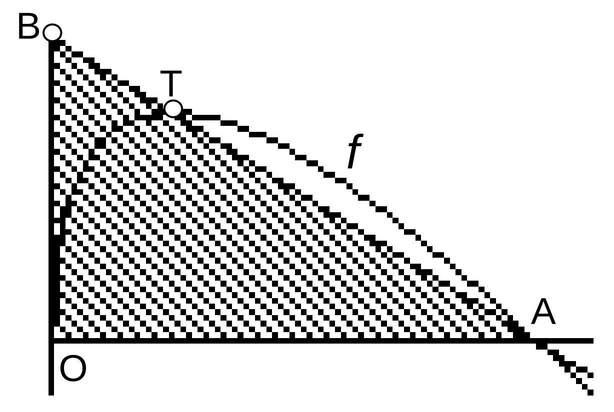
$$y = 3\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{9}{4} = 3 \cdot \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{18}{4} - \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

2014-II Gelijke oppervlakte

$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door *f* en de *x*-as.
De lijn door *A* (9, 0) en *T* (2¼ , 2¼) snijdt de *y*-as in *B*.
Driehoek *OAB* is in de tweede figuur ook gearceerd.

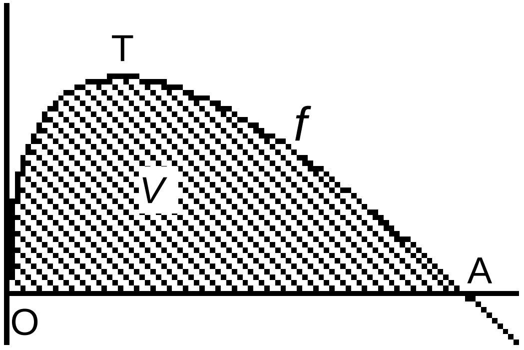
Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van *V* en de oppervlakte van driehoek *OAB* gelijk zijn.



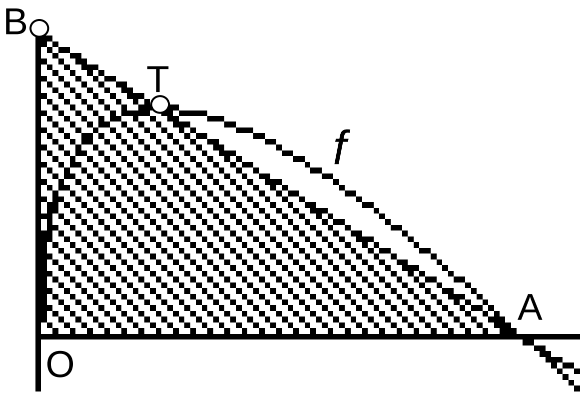


2014-II Gelijke oppervlakte

$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door *f* en de *x*-as.
De lijn door *A* (9, 0) en *T* (2¼ , 2¼) snijdt de *y*-as in *B*.
Driehoek *OAB* is in de tweede figuur ook gearceerd.

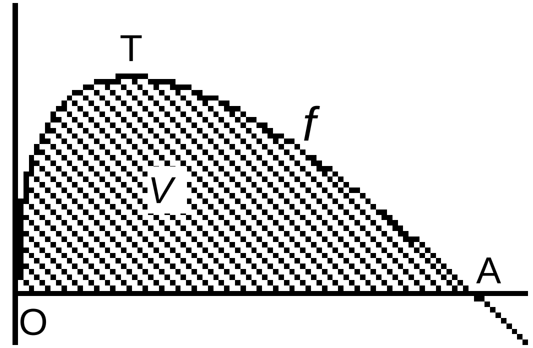


Vraag 2. **Bewijs** dat de oppervlakte van *V* en de oppervlakte van driehoek *OAB* gelijk zijn.

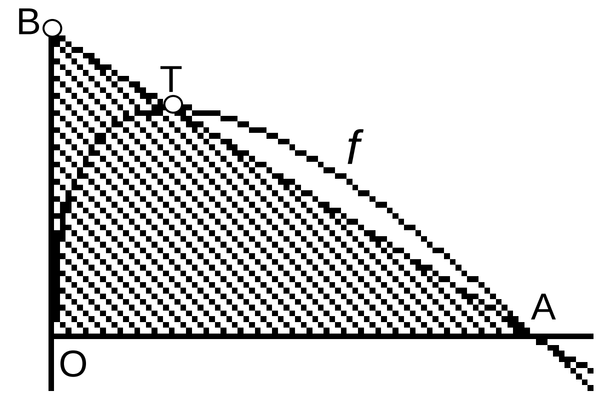


OPPASSEN!!! Als je hier met je grafische rekenmachine aan de slag gaat, bijvoorbeeld via **fnInt (f(X), X, 0, 9)** **en daar dezelfde waarde uitkrijgt als de oppervlakte van de driehoek dan heb je niets *bewezen*, alleen maar aangetoond dat de oppervlakten ONGEVEER gelijk zijn (namelijk op 10 decimalen nauwkeurig)**

2014-II Gelijke oppervlakte



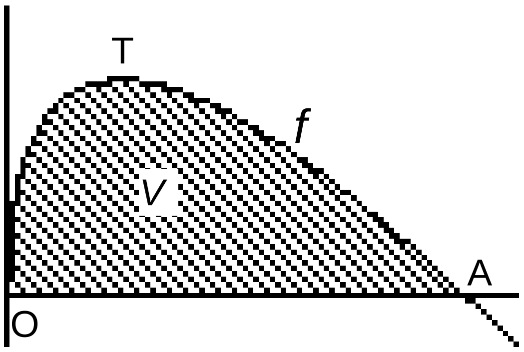
$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door f en de x-as.
De lijn door A (9, 0) en T (2¼ , 2¼) snijdt de y-as in B.
Driehoek OAB is in de tweede figuur ook gearceerd.



Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van V en de oppervlakte van driehoek OAB gelijk zijn.

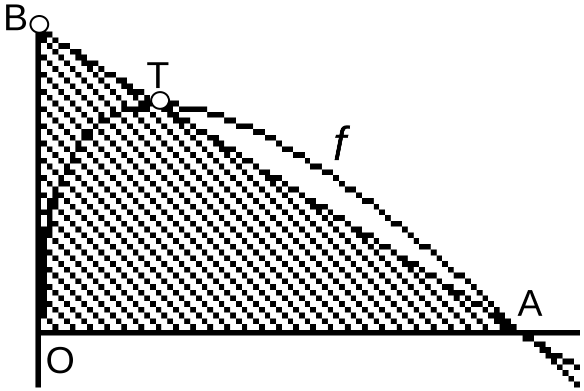
Lijn door T (2¼ , 2¼) en A (9, 0) heeft rico:

2014-II Gelijke oppervlakte



$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door f en de x-as.
De lijn door A (9, 0) en T (2¼ , 2¼) snijdt de y-as in B.
Driehoek OAB is in de tweede figuur ook gearceerd.

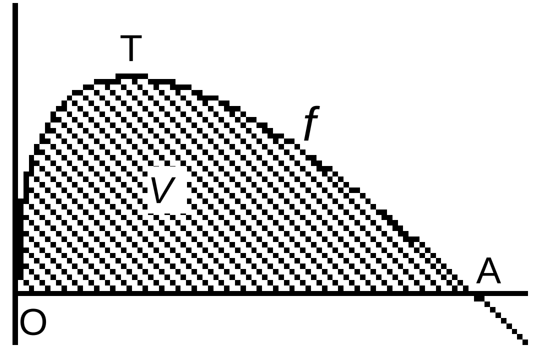
Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van V en de oppervlakte van driehoek OAB gelijk zijn.



Lijn door T (2¼ , 2¼) en A (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

dus vergl.:

2014-II Gelijke oppervlakte

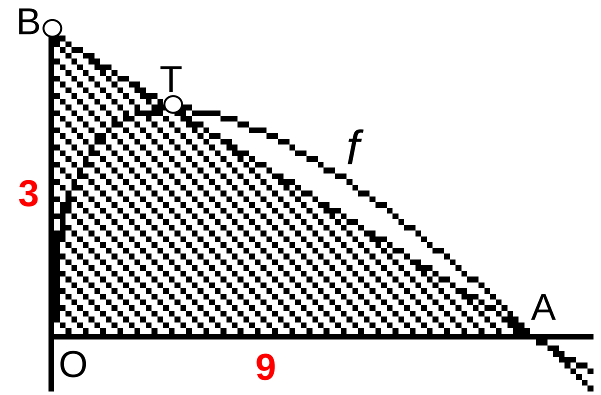


$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door f en de x-as.
De lijn door A (9, 0) en T (2¼ , 2¼) snijdt de y-as in B.
Driehoek OAB is in de tweede figuur ook gearceerd.

Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van V en de oppervlakte van driehoek OAB gelijk zijn.

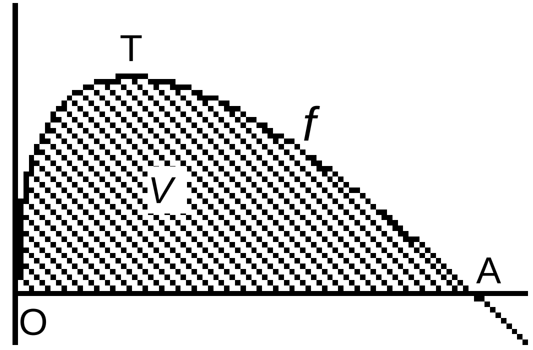
Lijn door T (2¼ , 2¼) en A (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

dus vergl.: $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ met snijpunt y-as:



2014-II Gelijke oppervlakte

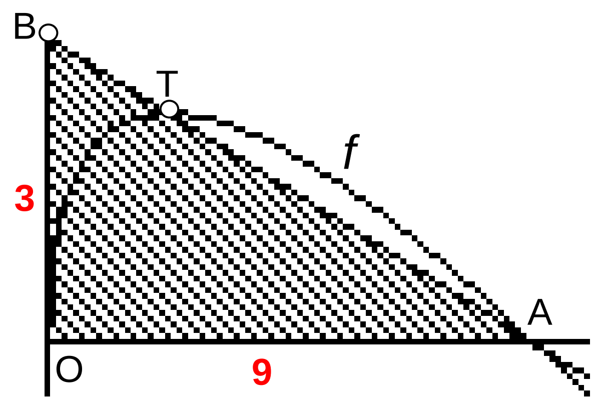
$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door *f* en de *x*-as.
De lijn door *A* (9, 0) en *T* (2¼ , 2¼) snijdt de *y*-as in *B*.
Driehoek *OAB* is in de tweede figuur ook gearceerd.



Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van *V* en de oppervlakte van driehoek *OAB* gelijk zijn.

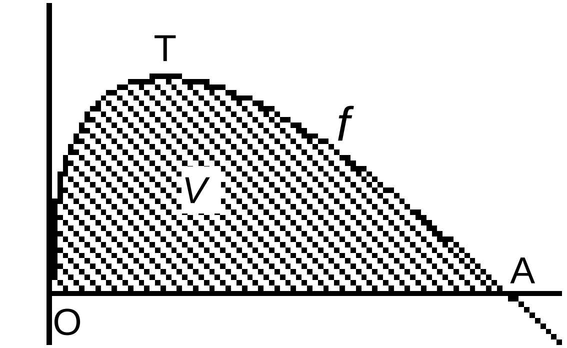
Lijn door *T* (2¼ , 2¼) en *A* (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

dus vergl.: $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ met snijpunt *y*-as: *B* (0, 3)



Oppervlakte driehoek *OAB* is:

2014-II Gelijke oppervlakte



$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door *f* en de *x*-as.
De lijn door *A* (9, 0) en *T* (2¼ , 2¼) snijdt de *y*-as in *B*.
Driehoek *OAB* is in de tweede figuur ook gearceerd.

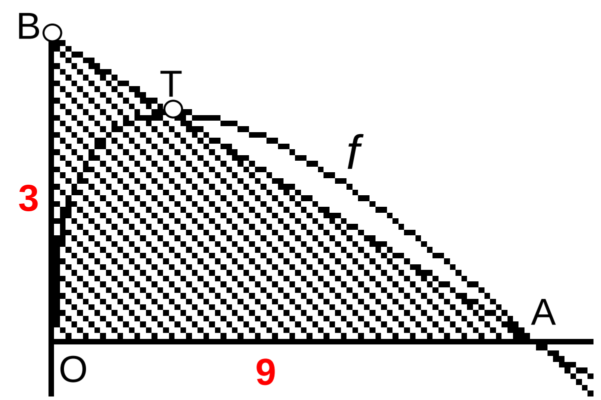
Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van *V* en de oppervlakte van driehoek *OAB* gelijk zijn.

Lijn door *T* (2¼ , 2¼) en *A* (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

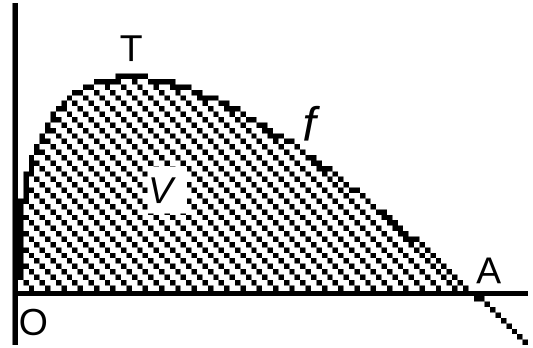
dus vergl.: $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ met snijpunt *y*-as: *B* (0, 3)

Oppervlakte driehoek *OAB* is: ½×9×3 = 13½

Oppervlakte *V* is:

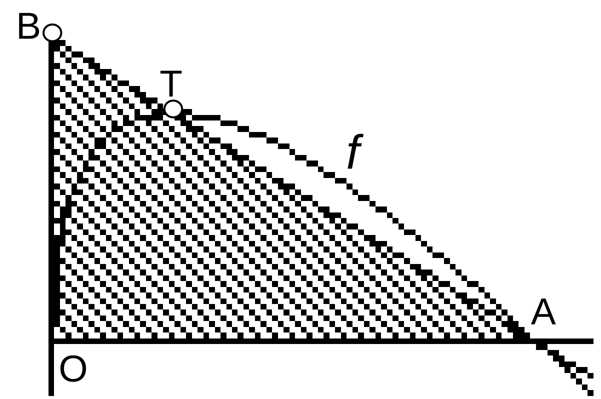


2014-II Gelijke oppervlakte



$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door *f* en de *x*-as.
De lijn door *A* (9, 0) en *T* (2¼ , 2¼) snijdt de *y*-as in *B*.
Driehoek *OAB* is in de tweede figuur ook gearceerd.

Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van *V* en de oppervlakte van driehoek *OAB* gelijk zijn.



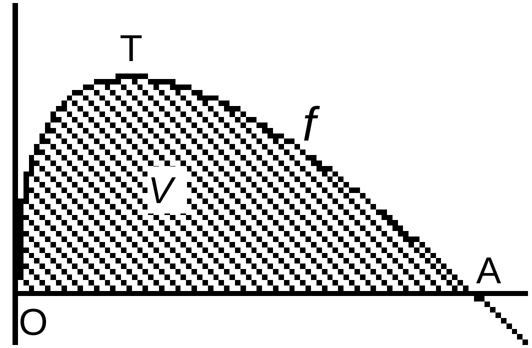
Lijn door *T* (2¼ , 2¼) en *A* (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

dus vergl.: $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ met snijpunt *y*-as: *B* (0, 3)

Oppervlakte driehoek *OAB* is: ½×9×3 = 13½

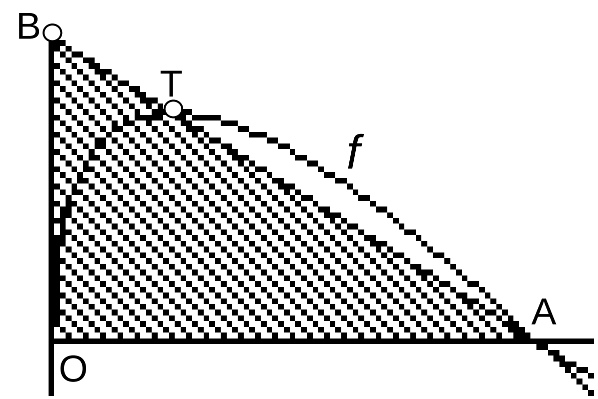
Oppervlakte *V* is: $\int_0^9 3\sqrt{x} - 3\,dx =$

2014-II Gelijke oppervlakte



$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door *f* en de *x*-as.
De lijn door *A* (9, 0) en *T* (2¼ , 2¼) snijdt de *y*-as in *B*.
Driehoek *OAB* is in de tweede figuur ook gearceerd.

Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van *V* en de oppervlakte van driehoek *OAB* gelijk zijn.



Lijn door *T* (2¼ , 2¼) en *A* (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

dus vergl.: $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ met snijpunt *y*-as: *B* (0, 3)

Oppervlakte driehoek *OAB* is: ½×9×3 = 13½

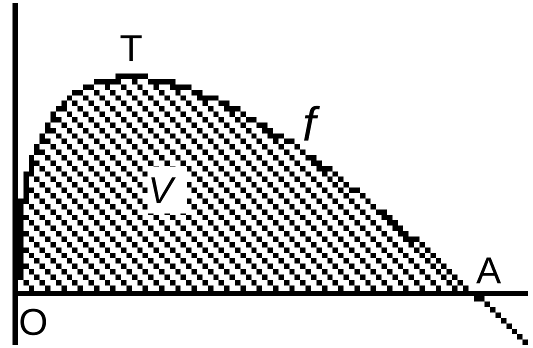
Oppervlakte *V* is: $\int_0^9 3\sqrt{x} - 3\,dx =$

$$\left[2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^9 =$$

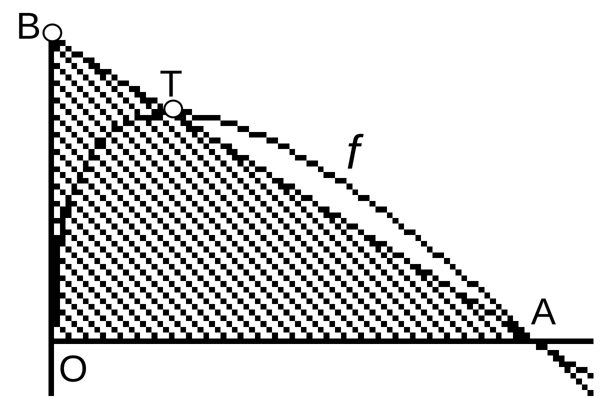
$$3 \cdot \frac{1}{1\frac{1}{2}} \cdot x^{1\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x\sqrt{x}$$

2014-II Gelijke oppervlakte

$f(x) = 3\sqrt{x} - x$
V is het gearceerde vlakdeel begrensd door f en de x-as.
De lijn door A (9, 0) en T (2¼ , 2¼) snijdt de y-as in B.
Driehoek OAB is in de tweede figuur ook gearceerd.



Vraag 2. Bewijs dat de oppervlakte van V en de oppervlakte van driehoek OAB gelijk zijn.



Lijn door T (2¼ , 2¼) en A (9, 0) heeft rico: $\dfrac{0-2\frac{1}{4}}{9-2\frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{27}{4}} = -\dfrac{1}{3}$

dus vergl.: $y = -\dfrac{1}{3}x + 3$ met snijpunt y-as: B (0, 3)

Oppervlakte driehoek OAB is: ½×9×3 = 13½

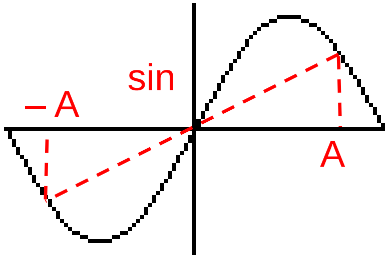
Oppervlakte V is: $\int_0^9 3\sqrt{x} - 3\,dx =$

$\left[2x\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^9 = \qquad 54 - \dfrac{1}{2}\cdot 81 = 13\dfrac{1}{2}$

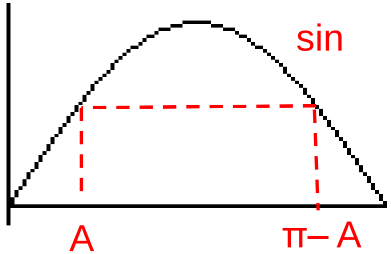
Zelfde uitkomst.

Vijf regels uit de goniometrie

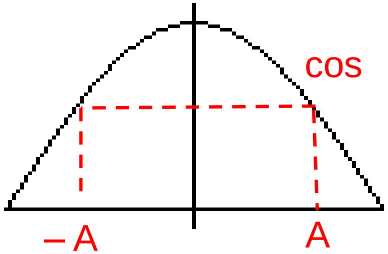
sin (– A) = – sin (A) vanwege de puntsymmetrie in (0, 0)



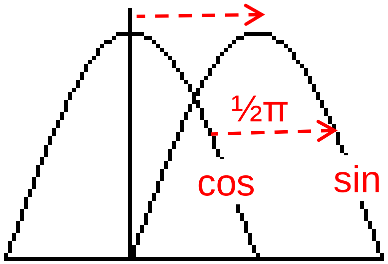
sin (π – A) = sin (A) vanwege de symmetrie in x = ½π



cos (– A) = cos (A) vanwege de symmetrie in de y-as

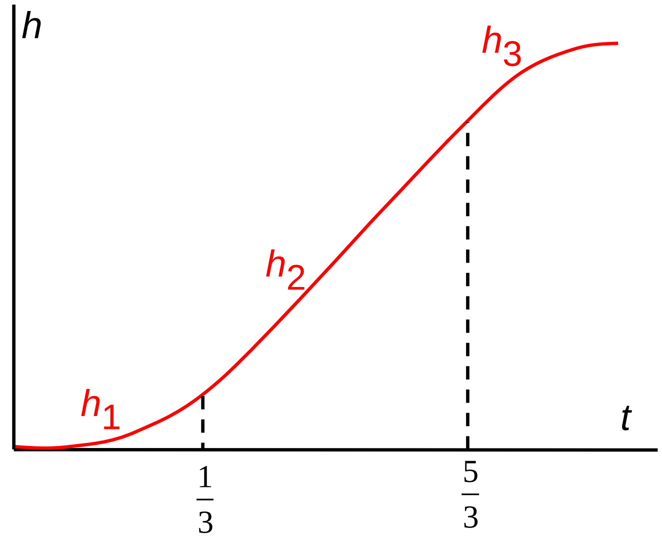


$$\left.\begin{array}{l} \cos(\tfrac{1}{2}\pi - A) = \sin(A) \\ \\ \sin(\tfrac{1}{2}\pi - A) = \cos(A) \end{array}\right\} \text{cosinus } \tfrac{1}{2}\pi \text{ naar rechts verschuiven}$$



2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte h weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd t.



Fase 1 Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

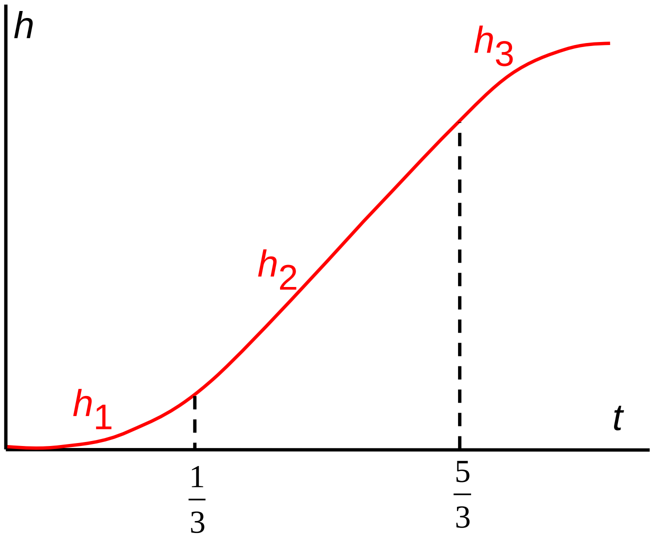
Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \leq 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 3. Bewijs dat de hoogte aan het eind van fase 2 gelijk is aan de hoogte aan het begin van fase 3.

Dus te bewijzen: $h_2(\frac{5}{3}) = h_3(\frac{5}{3})$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

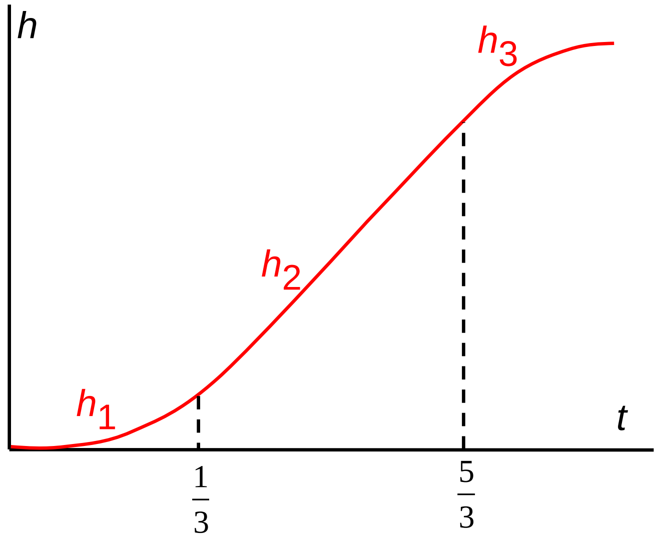
Vraag 3. Bewijs dat de hoogte aan het eind van fase 2 gelijk is aan de hoogte aan het begin van fase 3.

Dus te bewijzen: $h_2(\frac{5}{3}) = h_3(\frac{5}{3})$

$$h_2(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{2\pi}{15})$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5}{15} - \frac{3}{15} = \frac{2}{15}$$

2014-II Het uiteinde van een wip



De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.

Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 3. Bewijs dat de hoogte aan het eind van fase 2 gelijk is aan de hoogte aan het begin van fase 3.

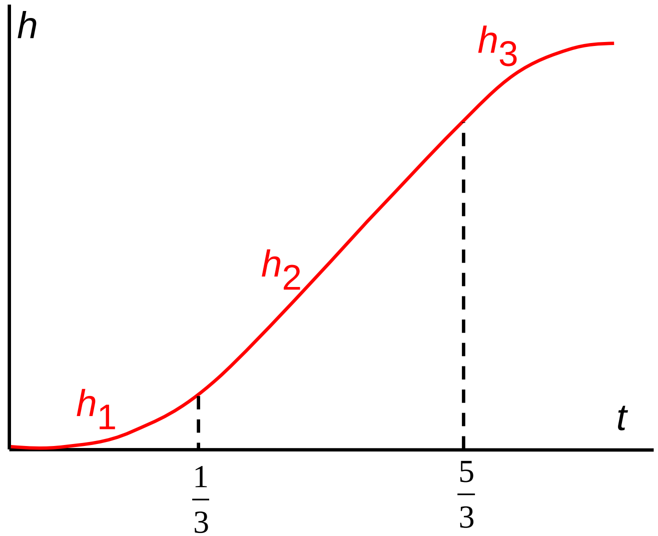
Dus te bewijzen: $h_2(\frac{5}{3}) = h_3(\frac{5}{3})$

$$h_2(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{2\pi}{15})$$

$$h_3(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10} \cdot \frac{25}{9} + \frac{6\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{31\pi}{30}) = 1 + 2\sin(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi - \frac{31\pi}{30})$$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 3. Bewijs dat de hoogte aan het eind van fase 2 gelijk is aan de hoogte aan het begin van fase 3.

Dus te bewijzen: $h_2(\frac{5}{3}) = h_3(\frac{5}{3})$

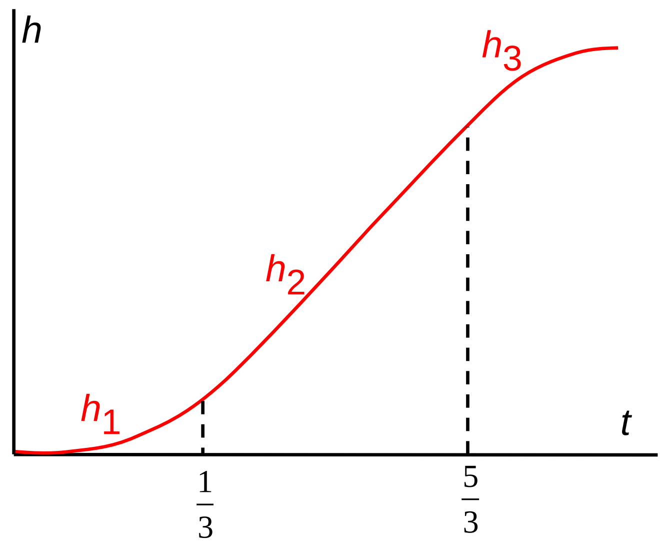
$$h_2(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{2\pi}{15})$$

$$h_3(\frac{5}{3}) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10} \cdot \frac{25}{9} + \frac{6\pi}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{31\pi}{30}) = 1 + 2\sin(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi - \frac{31\pi}{30}) \quad = 1 + 2\sin(\frac{2}{15}\pi)$$

$$-\frac{25}{30} + \frac{60}{30} - \frac{31}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

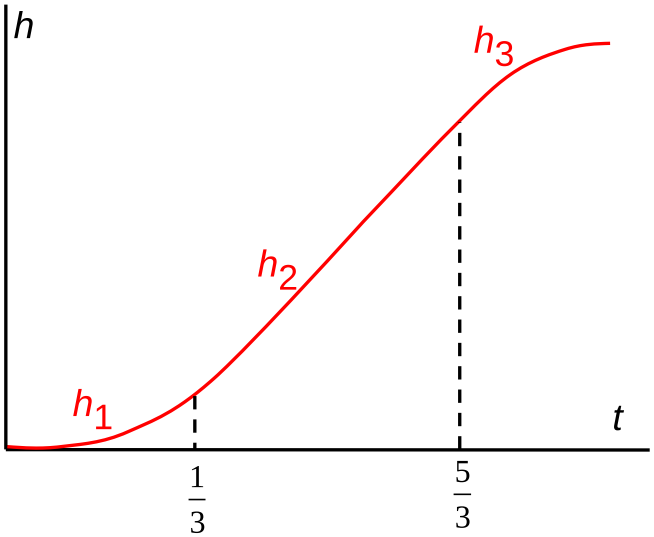
Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \leq 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 4. Bewijs dat de helling aan het eind van fase 1 gelijk is aan $\frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

Dus te bewijzen: $h_1'(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$ want helling = afgeleide

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \leq 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 4. Bewijs dat de helling aan het eind van fase 1 gelijk is aan $\frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

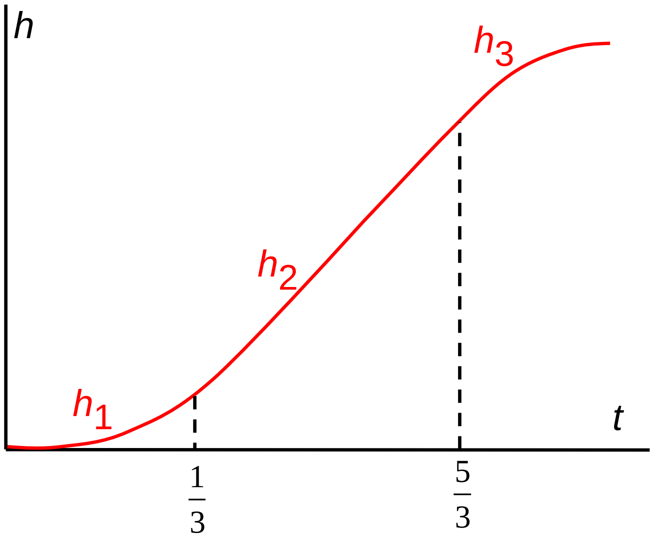
Dus te bewijzen: $h_1'(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

$$h_1'(t) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t$$

kettingregel

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \leq 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 4. Bewijs dat de helling aan het eind van fase 1 gelijk is aan $\frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

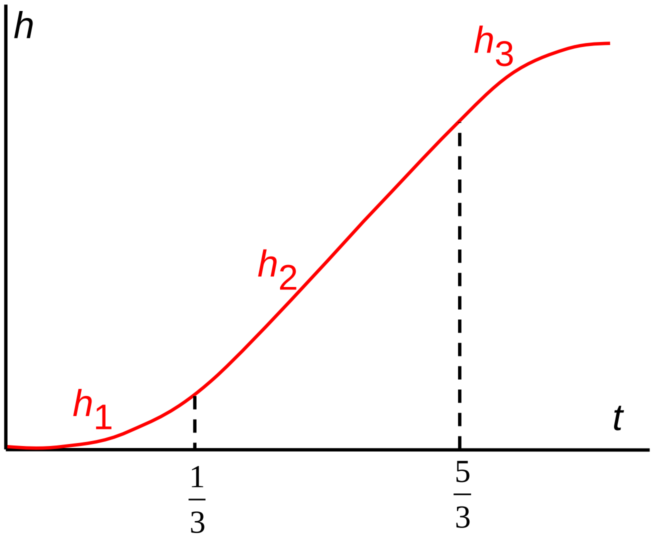
Dus te bewijzen: $h_1{}'(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

$$h_1{}'(t) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t$$

$$h_1{}'(\frac{1}{3}) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10} \cdot \frac{1}{9} - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t$$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte h weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd t.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 4. Bewijs dat de helling aan het eind van fase 1 gelijk is aan $\frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

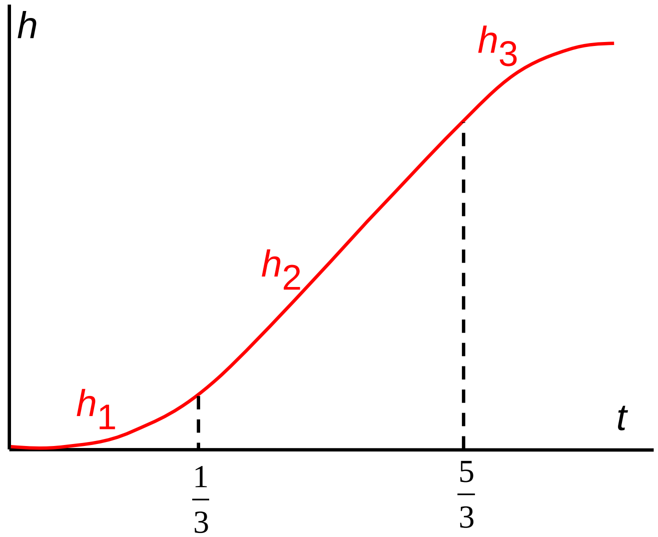
Dus te bewijzen: $h_1'(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

$$h_1'(t) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t$$

$$h_1'(\frac{1}{3}) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10} \cdot \frac{1}{9} - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t \qquad = 1 + 2 \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot \frac{1}{3}\cos(\frac{1 \cdot \pi}{30} - \frac{5\pi}{30})$$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 4. Bewijs dat de helling aan het eind van fase 1 gelijk is aan $\frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

Dus te bewijzen: $h_1'(\frac{1}{3}) = \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$

$$h_1'(t) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t$$

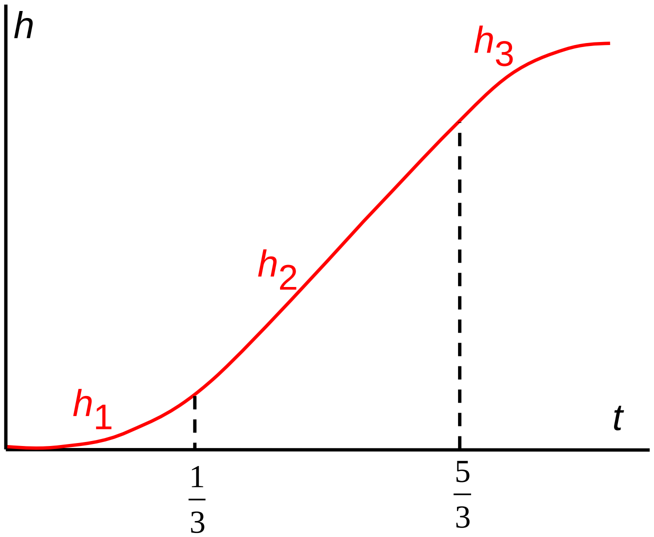
$$h_1'(\frac{1}{3}) = 1 + 2\cos(\frac{3\pi}{10} \cdot \frac{1}{9} - \frac{\pi}{6}) \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot t \qquad = 1 + 2 \cdot \frac{6\pi}{10} \cdot \frac{1}{3}\cos(\frac{1 \cdot \pi}{30} - \frac{5\pi}{30}) \qquad = \frac{2\pi}{5}\cos(\frac{2\pi}{15})$$

$$\frac{1}{30} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} - \frac{5}{30} = -\frac{4}{30} = -\frac{2}{15}$$

$$\cos(-\frac{2\pi}{15}) = \cos(\frac{2\pi}{15}) \quad \text{want} \quad \cos(-A) = \cos A$$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

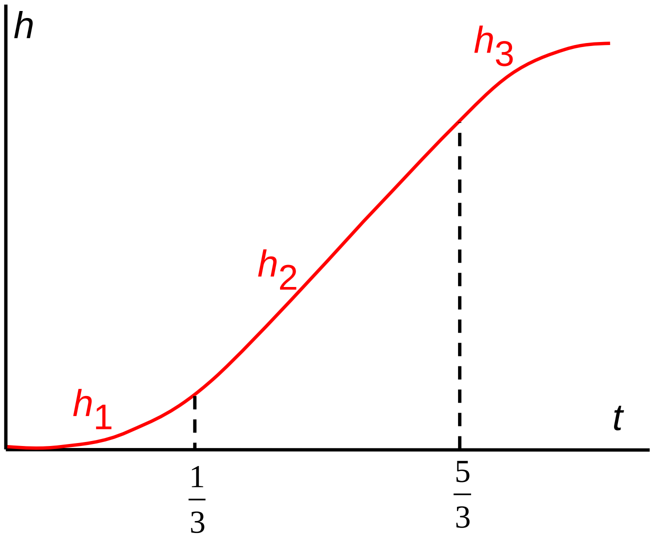
Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 5. Bewijs dat voor elke waarde van *a*, met $0 < a < 2/3$ geldt: $\frac{h_2(1-a) + h_2(1+a)}{2} = 1$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte h weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd t.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

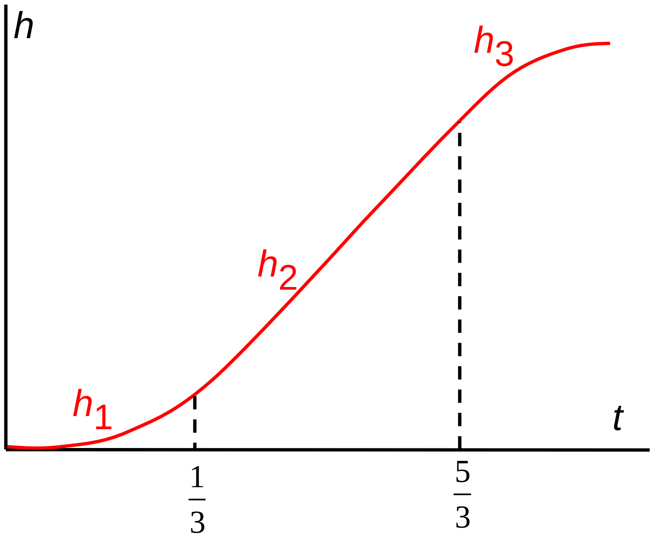
Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 5. Bewijs dat voor elke waarde van a, met $0 < a < 2/3$ geldt: $\frac{h_2(1-a) + h_2(1+a)}{2} = 1$

Dus te bewijzen: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 2$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

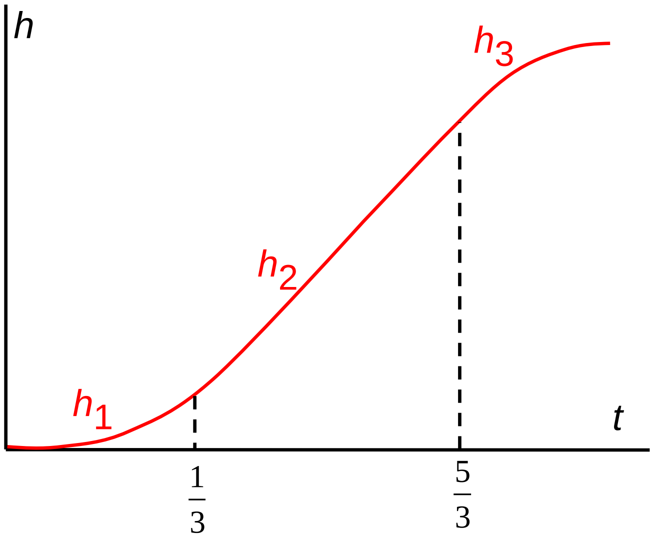
Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 5. Dus te bewijzen voor $0 < a < 2/3$: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 2$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte h weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd t.



Fase 1 Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \leq \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

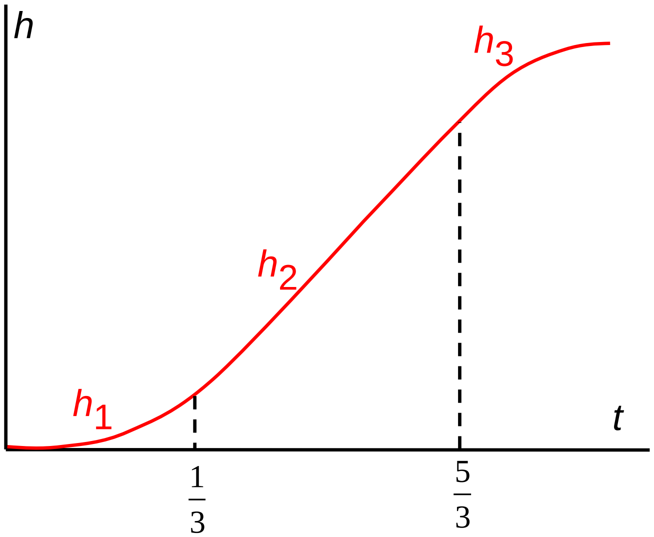
Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \leq 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 5. Dus te bewijzen voor $0 < a < 2/3$: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 2$

$$h_2(1-a) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a) - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a-1)) = 1 + 2\sin(-\frac{\pi}{5}\text{a})$$

2014-II **Het uiteinde van een wip**

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

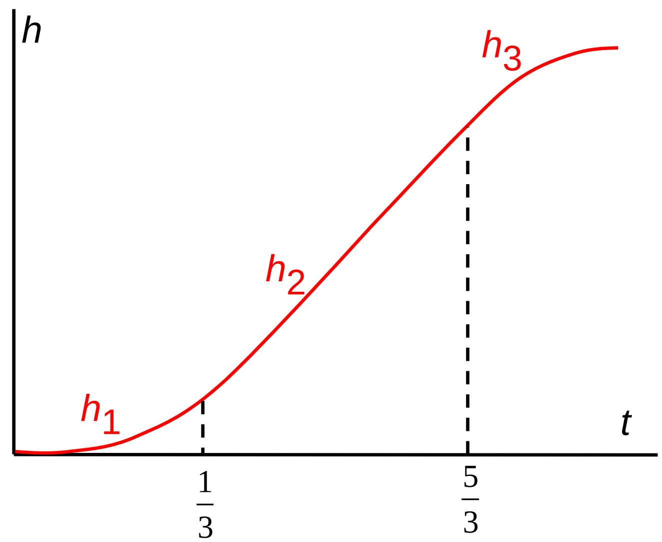
Vraag 5. Dus te bewijzen voor $0 < a < 2/3$: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 2$

$$h_2(1-a) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a) - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a-1)) = 1 + 2\sin(-\frac{\pi}{5}\mathrm{a}) \quad = 1 - 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})$$

vanwege $\sin(-A) = -\sin A$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 5. Dus te bewijzen voor $0 < a < 2/3$: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 2$

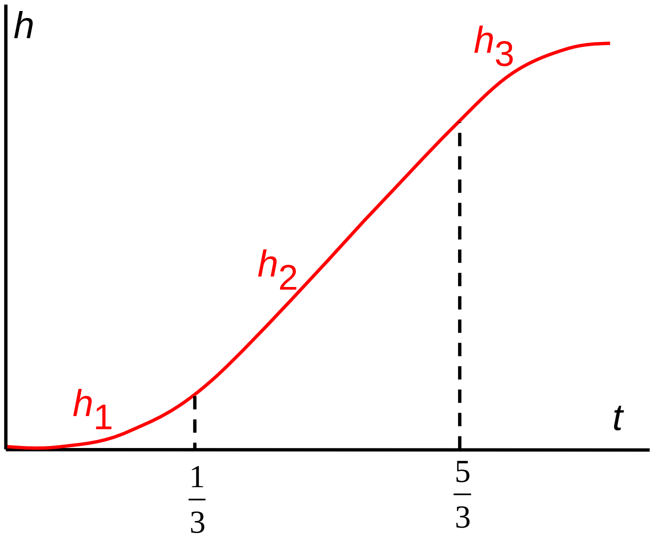
$$h_2(1-a) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a) - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a-1)) = 1 + 2\sin(-\frac{\pi}{5}\mathrm{a}) = 1 - 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})$$

$$h_2(1+a) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1+a) - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1+a-1)) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})$$

Dus: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 1 - 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a}) + 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})$

2014-II Het uiteinde van een wip

De grafiek hiernaast geeft de hoogte *h* weer van het uiteinde van een wip als functie van de tijd *t*.



Fase 1 Voor $0 \le t \le \frac{1}{3}$: $h_1(t) = 1 + 2\sin(\frac{3\pi}{10}t^2 - \frac{\pi}{6})$

Fase 2 Voor $\frac{1}{3} < t \le \frac{5}{3}$: $h_2(t) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}t - \frac{\pi}{5})$

Fase 3 Voor $\frac{5}{3} < t \le 2$: $h_3(t) = 1 + 2\sin(-\frac{3\pi}{10}t^2 + \frac{6\pi}{5}t - \frac{31\pi}{30})$

Vraag 5. Dus te bewijzen voor $0 < a < 2/3$: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 2$

$$h_2(1-a) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a) - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1-a-1)) = 1 + 2\sin(-\frac{\pi}{5}\mathrm{a}) \quad = 1 - 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})$$

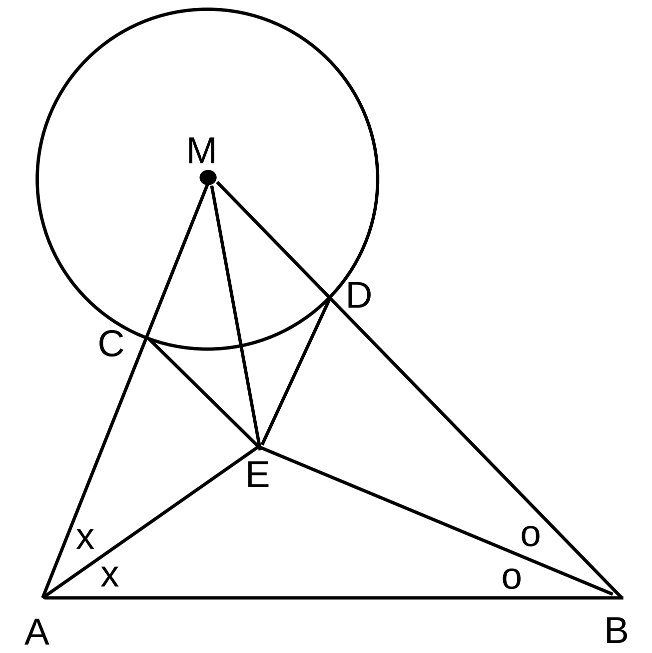
$$h_2(1+a) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1+a) - \frac{\pi}{5}) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}(1+a-1)) = 1 + 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})$$

Dus: $h_2(1-a) + h_2(1+a) = 1 \cancel{- 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})} + 1 \cancel{+ 2\sin(\frac{\pi}{5}\mathrm{a})}$ en dat is inderdaad 1 + 1 = 2

2014-II Cirkel en lijnstuk

Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.

Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

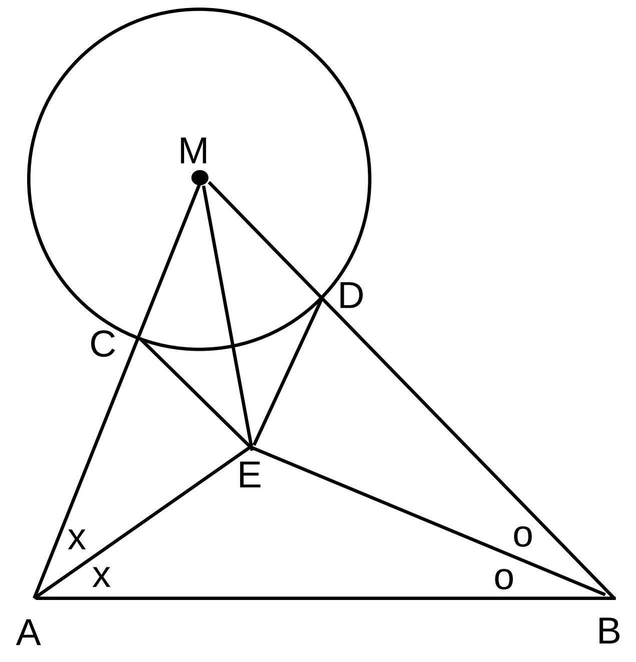


2014-II Cirkel en lijnstuk

Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.

Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

- ME is ook een bissectrice (*bissectrices door één punt*)

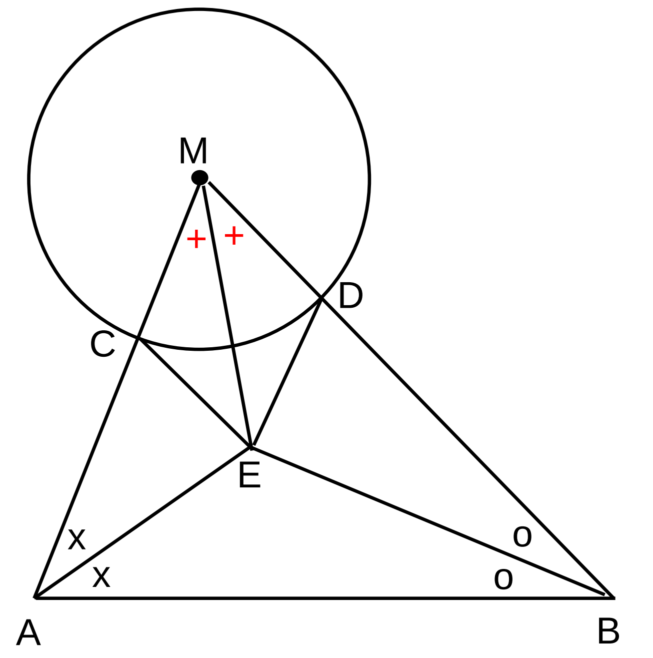


2014-II Cirkel en lijnstuk

Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.

Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

- ME is ook een bissectrice (*bissectrices door één punt*)
- Dus ∠AME = ∠BME

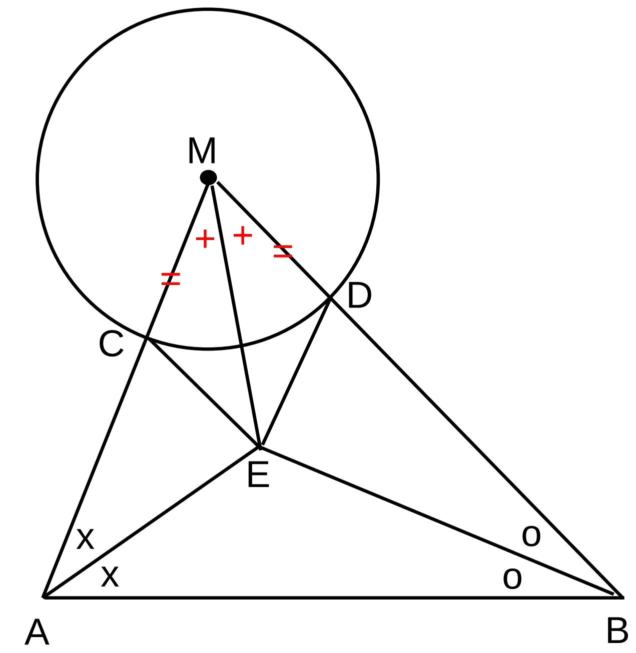


2014-II Cirkel en lijnstuk

Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.

Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

- ME is ook een bissectrice (*bissectrices door één punt*)
- Dus ∠AME = ∠BME
- CM = DM (*straal cirkel*)

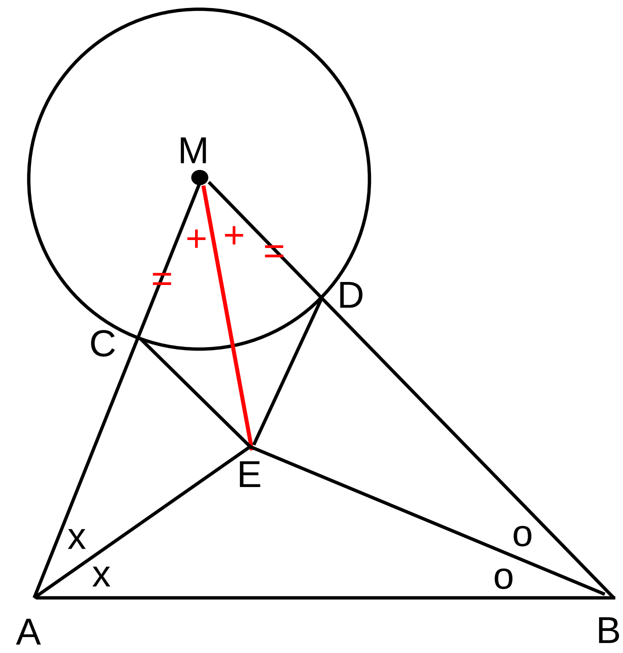


2014-II Cirkel en lijnstuk

Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.

Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

- ME is ook een bissectrice (*bissectrices door één punt*)
- Dus ∠AME = ∠BME
- CM = DM (*straal cirkel*)
- ME = ME

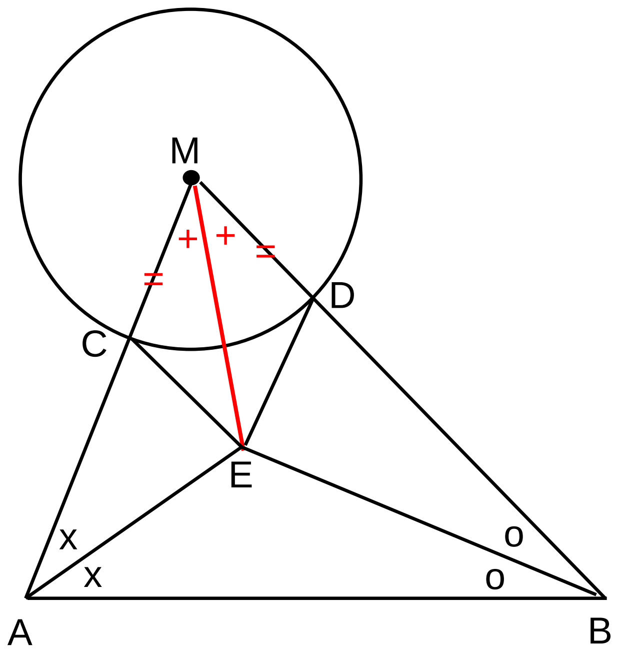


2014-II   Cirkel en lijnstuk

Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.

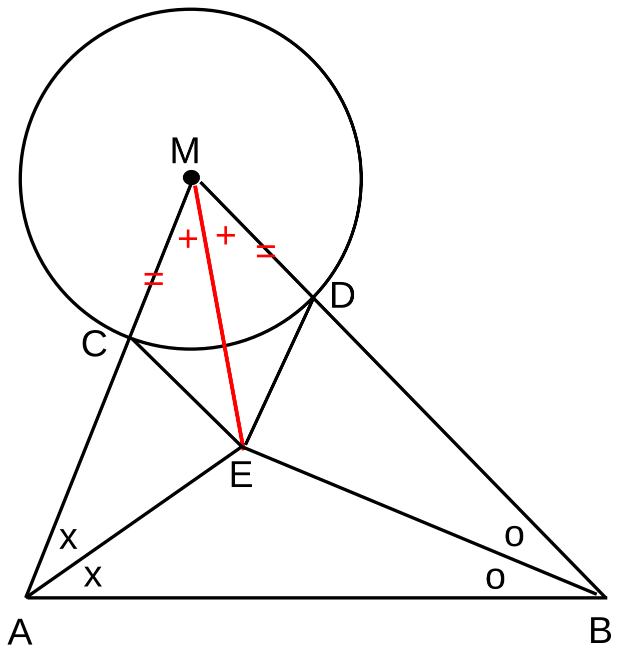
Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

- ME is ook een bissectrice (*bissectrices door één punt*)
- Dus ∠AME = ∠BME
- CM = DM (*straal cirkel*)
- ME = ME
- ΔCME ≡ ΔDME (*congruentiegeval ZHZ*)



2014-II Cirkel en lijnstuk

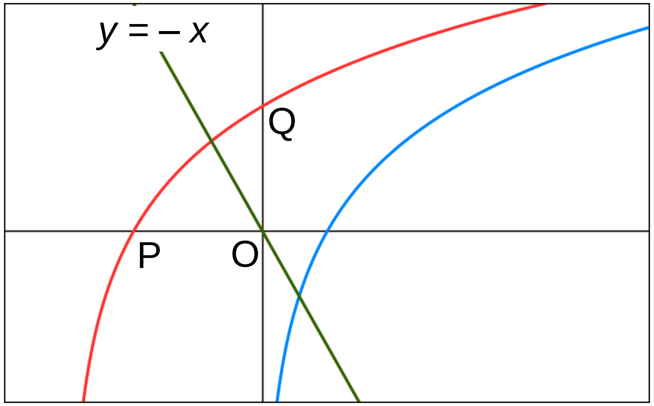
Gegeven een cirkel met middelpunt M en een lijnstuk AB.
AM en BM snijden de cirkel in C en D.
De bissectrices van de hoeken A en B snijden elkaar in E.



Vraag 6. Bewijs dat CE = DE.

- ME is ook een bissectrice (*bissectrices door één punt*)
- Dus ∠AME = ∠BME
- CM = DM (*straal cirkel*)
- ME = ME
- ΔCME ≡ ΔDME (*congruentiegeval ZHZ*)
- Dus CE = DE

2014-II Gespiegelde punten



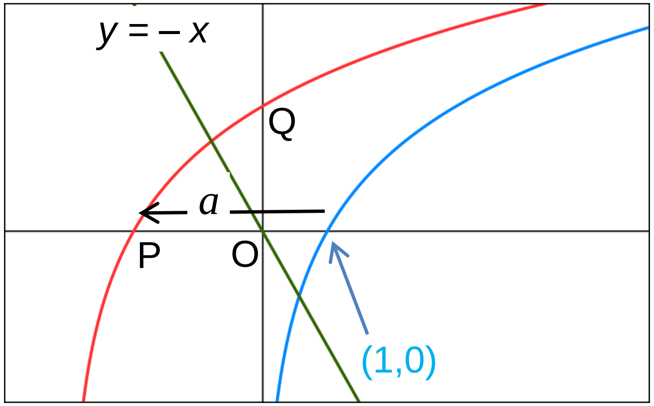
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.

2014-II Gespiegelde punten

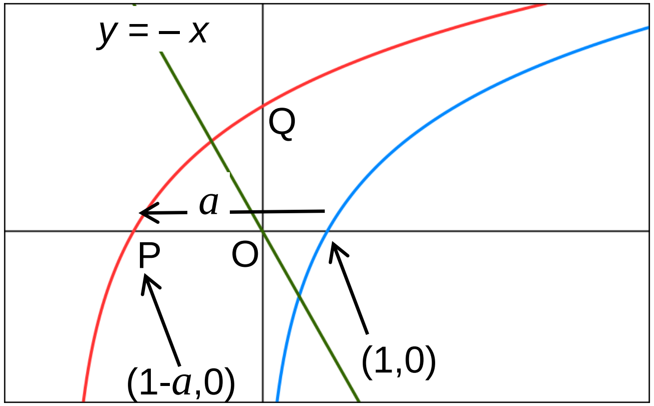
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.



Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = \ldots$

2014-II Gespiegelde punten



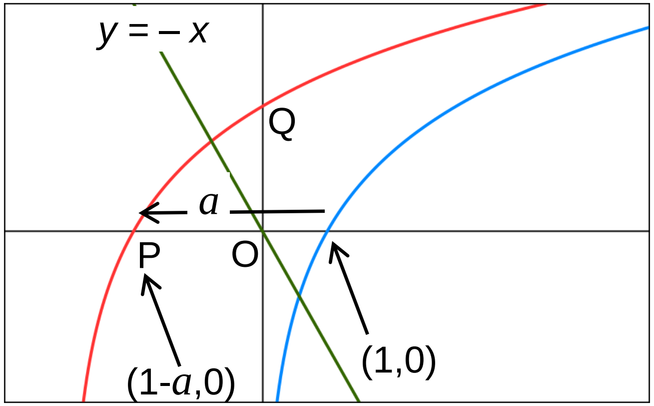
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$

2014-II Gespiegelde punten

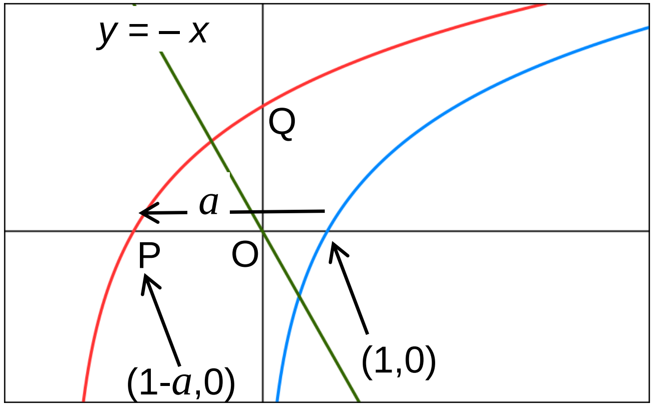
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.



Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$
Als je $f(x) = 2 \cdot \ln x$ a naar links verschuift krijg je $g(x) = \ldots$

2014-II Gespiegelde punten



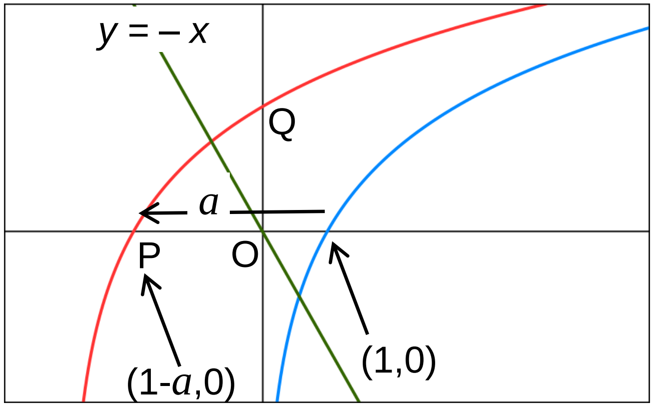
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$
Als je $f(x) = 2 \cdot \ln x$ a naar links verschuift krijg je $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$
Q volgt uit:

2014-II Gespiegelde punten

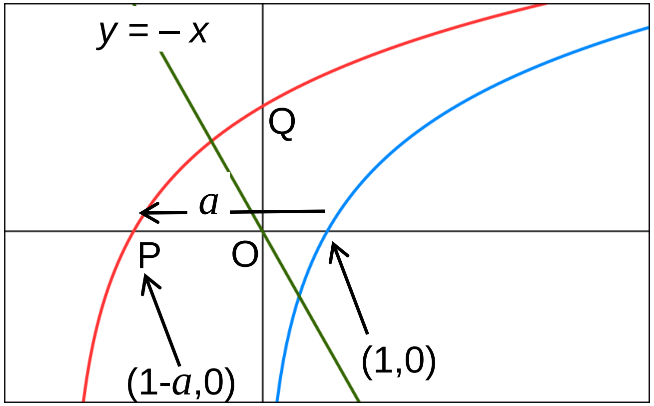
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.



Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$
Als je $f(x) = 2 \cdot \ln x$ a naar links verschuift krijg je $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$
Q volgt uit: $g(0) = 2 \cdot \ln a$ dus $y_Q = \ldots$

2014-II Gespiegelde punten



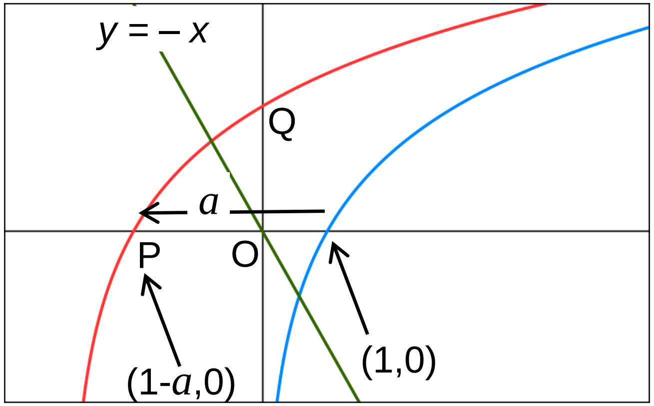
Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$
Als je $f(x) = 2 \cdot \ln x$ a naar links verschuift krijg je $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$
Q volgt uit: $g(0) = 2 \cdot \ln a$ dus $y_Q = 2 \ln a$.

Uit $y_Q = -x_P$ volgt:

2014-II Gespiegelde punten



Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

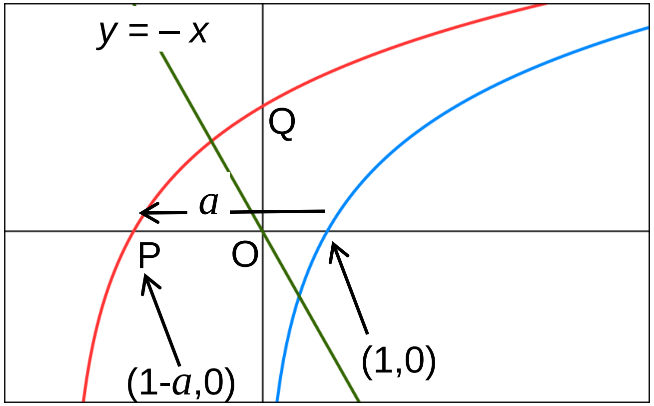
Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$
Als je $f(x) = 2 \cdot \ln x$ a naar links verschuift krijg je $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$
Q volgt uit: $g(0) = 2 \cdot \ln a$ dus $y_Q = 2 \ln a$.

Uit $y_Q = -x_P$ volgt: $2 \cdot \ln a = -(1 - a) = a - 1$

Dit oplossen met de GR

2014-II Gespiegelde punten



Gegeven de grafiek van $f(x) = 2 \cdot \ln x$; de grafiek van g ontstaat door de grafiek van f over een afstand a naar links te verschuiven, met $a > 1$.
De grafiek van g snijdt de x-as in P en de y-as in Q.

Er is een waarde van a waarvoor het beeld van P bij spiegeling in de lijn $y = -x$ samenvalt met Q. Er geldt dan: $y_Q = -x_P$.

Vraag 7. Bereken deze waarde van a, afgerond op 2 decimalen.
Het nulpunt van f werd a naar links geschoven dus er geldt: $x_P = 1 - a$
Als je $f(x) = 2 \cdot \ln x$ a naar links verschuift krijg je $g(x) = 2 \cdot \ln(x + a)$
Q volgt uit: $g(0) = 2 \cdot \ln a$ dus $y_Q = 2 \ln a$.

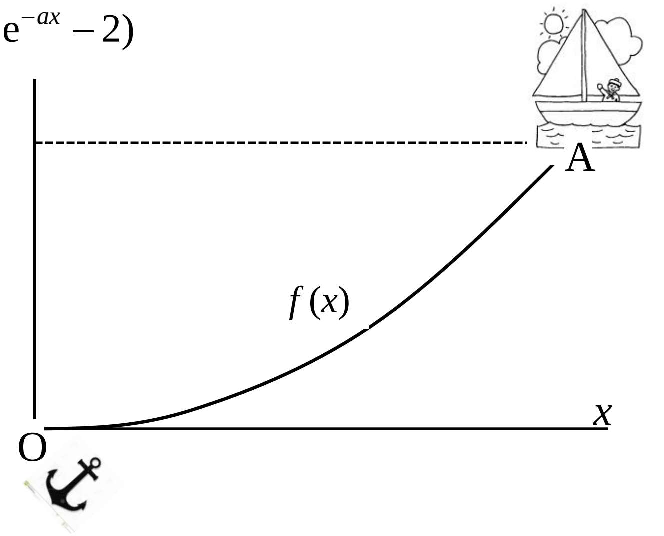
Uit $y_Q = -x_P$ volgt: $2 \cdot \ln a = a - 1$

Dit oplossen met de GR, bijvoorbeeld intersect Y1= 2ln(X) en Y2 = X – 1

Geeft antwoord $a \approx 3{,}51$

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax} - 2)$



Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.

Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ax} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ax})^2$

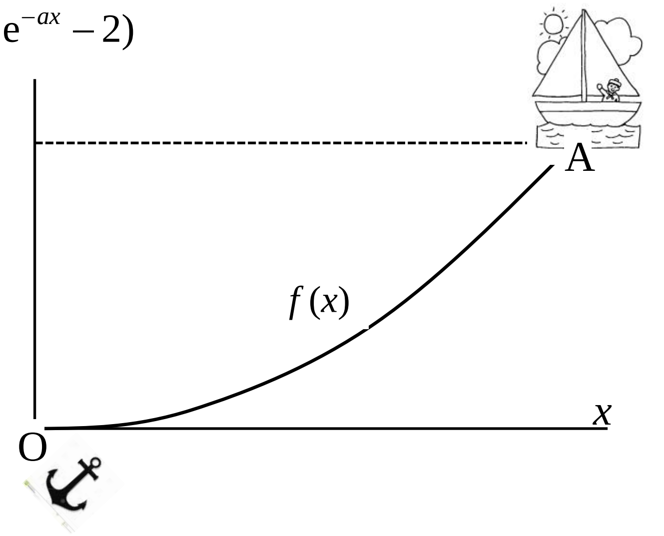
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$f'(x) =$

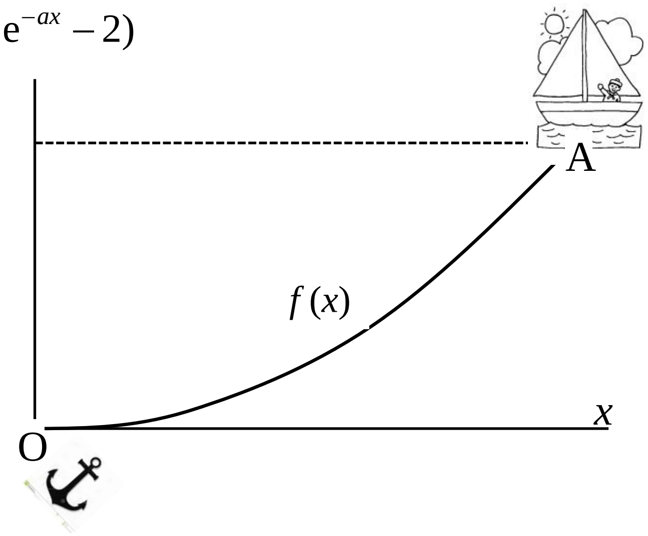
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$f\,‘(x) = \frac{1}{2a} \cdot (a \cdot e^{ax} + -a \cdot e^{-ax}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$

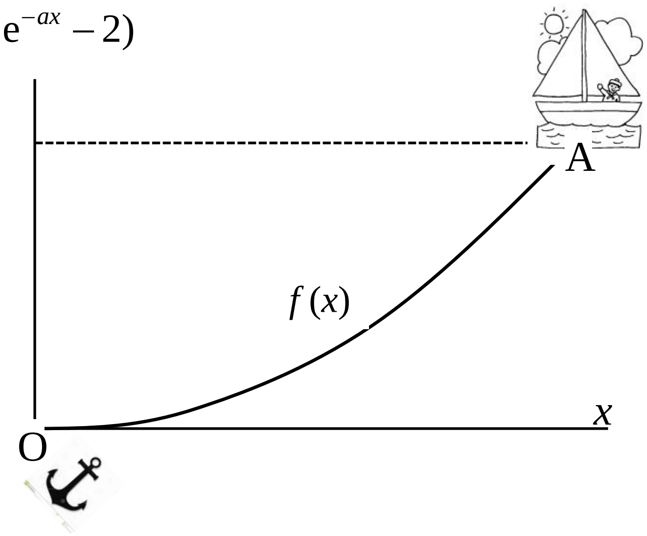
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$f'(x) = \frac{1}{2a} \cdot (a \cdot e^{ax} + -a \cdot e^{-ax}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$

$(f'(x))^2 =$

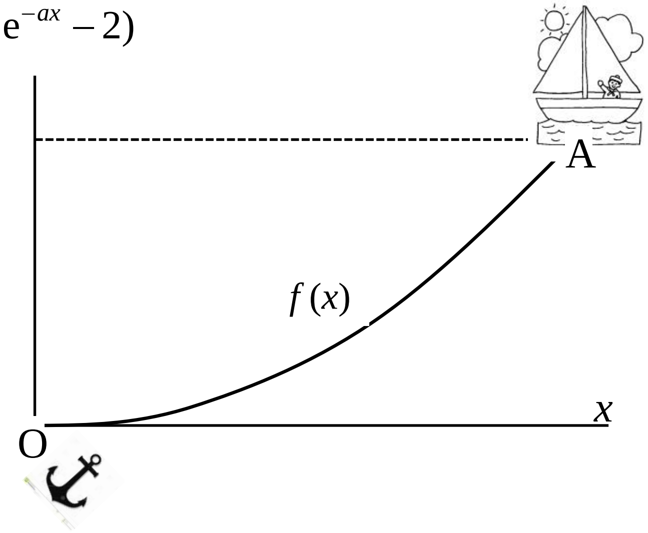
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (a \cdot e^{ax} + -a \cdot e^{-ax}) = \dfrac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$

$(f'(x))^2 = \dfrac{1}{4}(e^{ax} - e^{-ax})^2 = \dfrac{1}{4}(e^{2ax} - 2 \cdot e^{ax} \cdot e^{-ax} + e^{-2ax}) = \dfrac{1}{4}(e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})$

$e^{ax} \cdot e^{-ax} = e^{ax+-ax} = e^0 = 1$

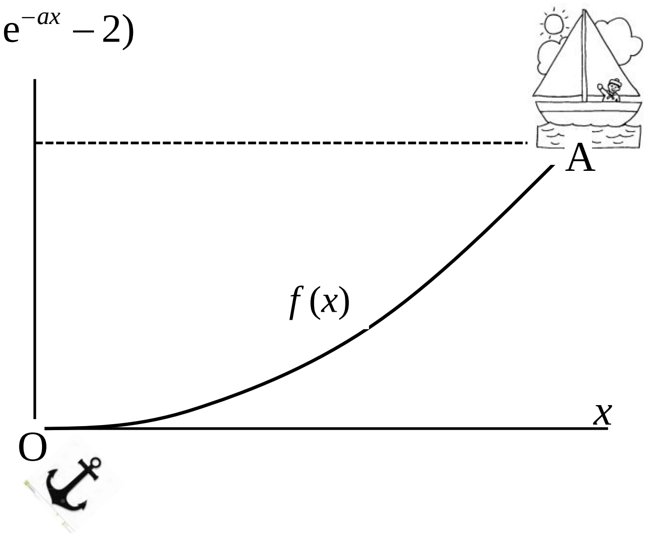
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (a \cdot e^{ax} + -a \cdot e^{-ax}) = \dfrac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$

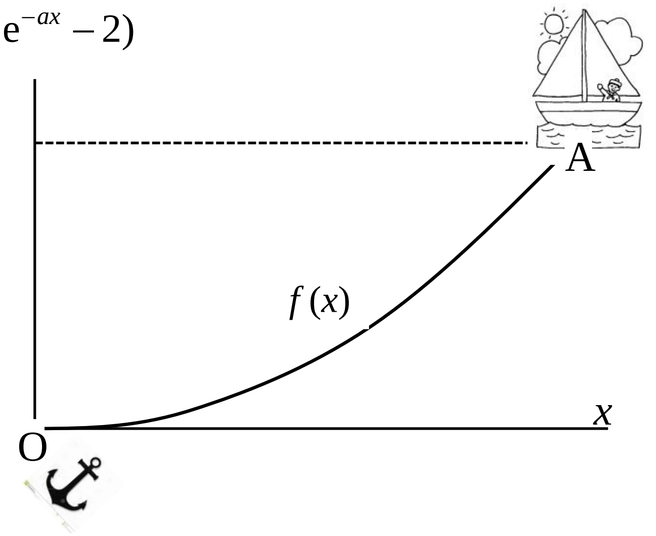
$(f'(x))^2 = \dfrac{1}{4}(e^{ax} - e^{-ax})^2 = \dfrac{1}{4}(e^{2ax} - 2 \cdot e^{ax} \cdot e^{-ax} + e^{-2ax}) = \dfrac{1}{4}(e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})$

$(\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2 =$

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (\mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.



In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.

Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{ax} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-ax})^2$

$f\,'(x) = \frac{1}{2a} \cdot (a \cdot \mathrm{e}^{ax} + -a \cdot \mathrm{e}^{-ax}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax})$

$(f\,'(x))^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax})^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2ax} - 2 \cdot \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{-ax} + \mathrm{e}^{-2ax}) = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2ax} - 2 + \mathrm{e}^{-2ax})$

$(\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{ax} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-ax})^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2ax} + 2 + \mathrm{e}^{-2ax}) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2ax} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2ax}$

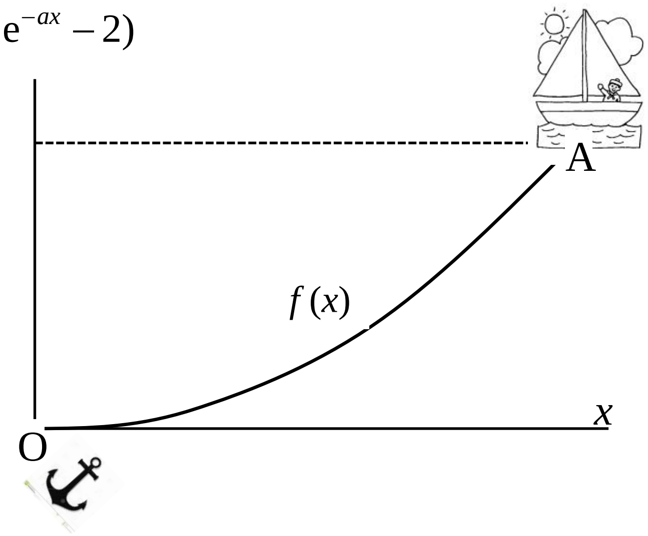
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$f'(x) = \frac{1}{2a} \cdot (a \cdot e^{ax} + -a \cdot e^{-ax}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$

$(f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^{ax} - e^{-ax})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ax} - 2 \cdot e^{ax} \cdot e^{-ax} + e^{-2ax}) = \frac{1}{4}(e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})$

$(\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) = \frac{1}{4}e^{2ax} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$

$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}e^{2ax} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2ax} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$

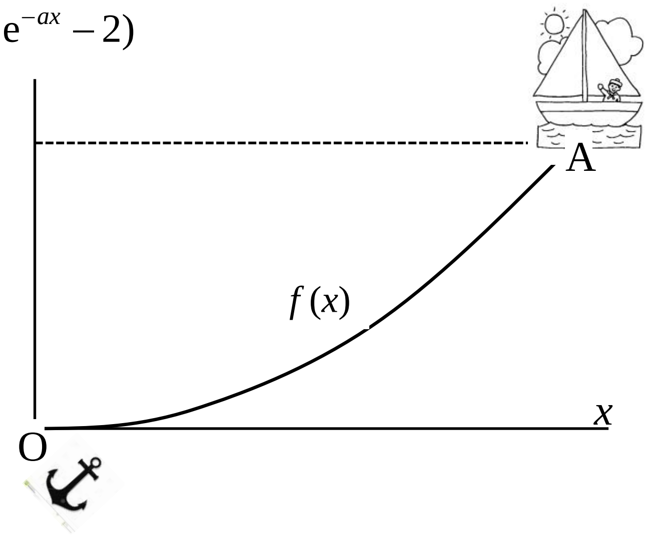
2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

Een schip ligt stil op de plaats A.

In O ligt het anker van een ketting tussen O en A.

De functie $f(x)$ beschrijft de kettinglijn.



Vraag 8. Toon aan dat $1 + (f'(x))^2 = (\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2$

$$f\,'(x) = \frac{1}{2a} \cdot (a \cdot e^{ax} + -a \cdot e^{-ax}) = \frac{1}{2} \cdot (e^{ax} - e^{-ax})$$

$$(f'(x))^2 = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ax} - 2 \cdot e^{ax} \cdot e^{-ax} + e^{-2ax}) = \frac{1}{4}(e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})$$

$$(\tfrac{1}{2}e^{ax} + \tfrac{1}{2}e^{-ax})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) = \frac{1}{4}e^{2ax} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$$

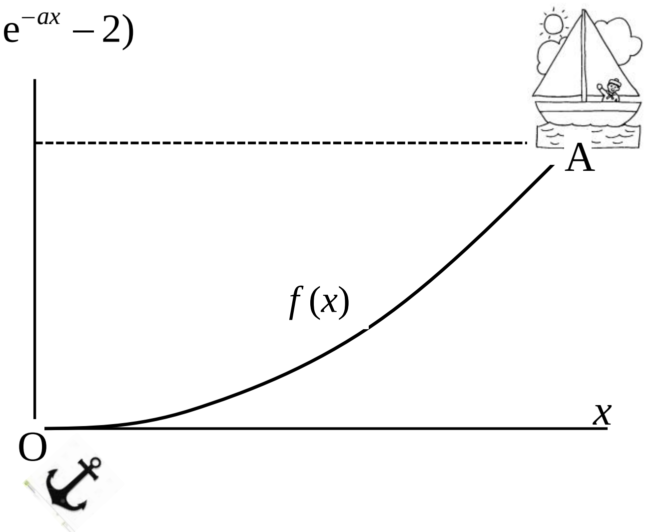
en dit is gelijk aan elkaar

$$1 + (f'(x))^2 = 1 + \frac{1}{4}e^{2ax} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2ax} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2ax} + \frac{1}{4}e^{-2ax}$$

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$

x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

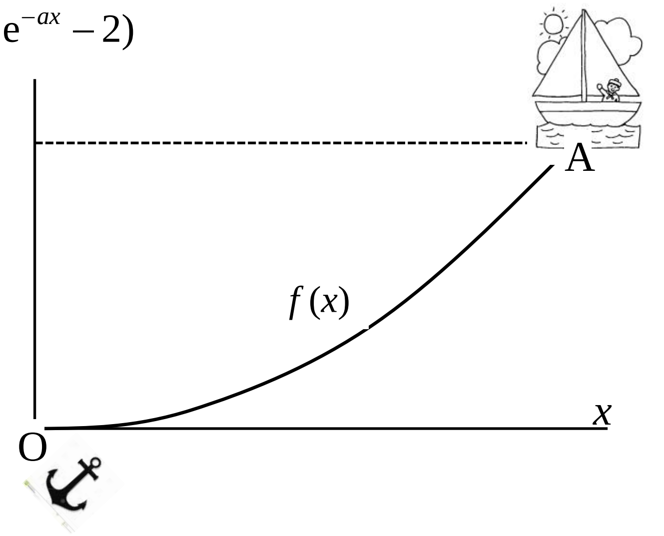


Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

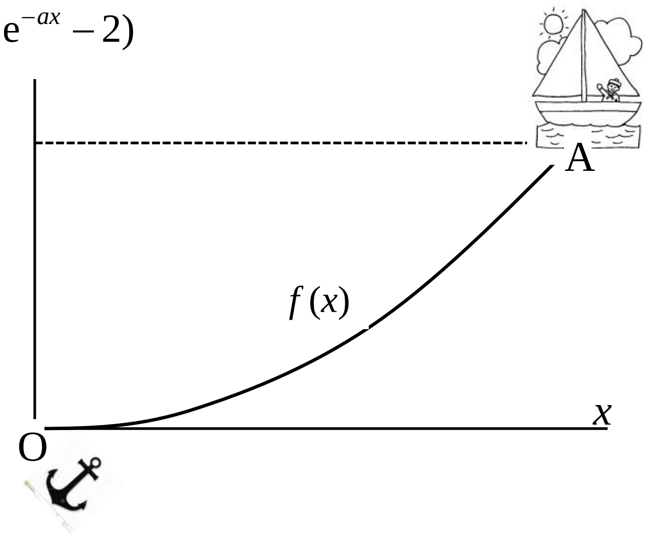
Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

De waterdiepte is:

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

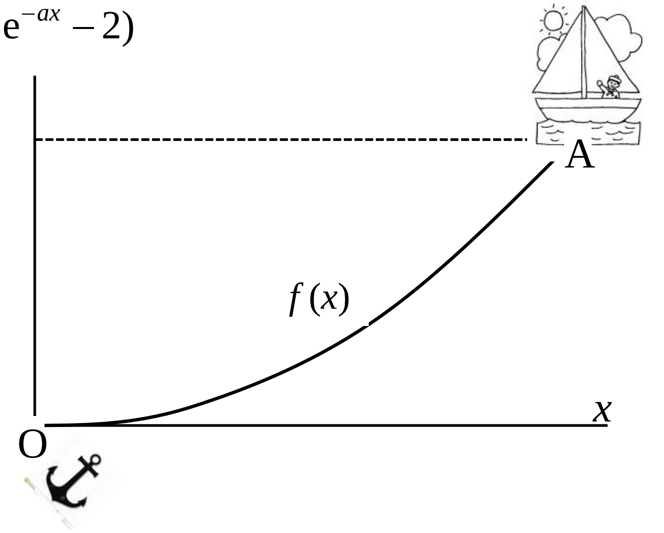
Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

De waterdiepte is: $f(96) = 34$ (m)

De lengte van de ketting is:

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

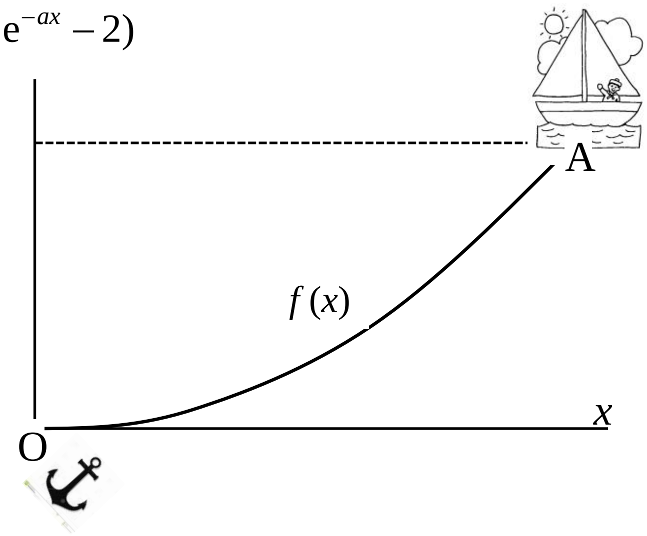
De waterdiepte is: $f(96) = 34$ (m)

De lengte van de ketting is: $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Met de GR komt hier uit:

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

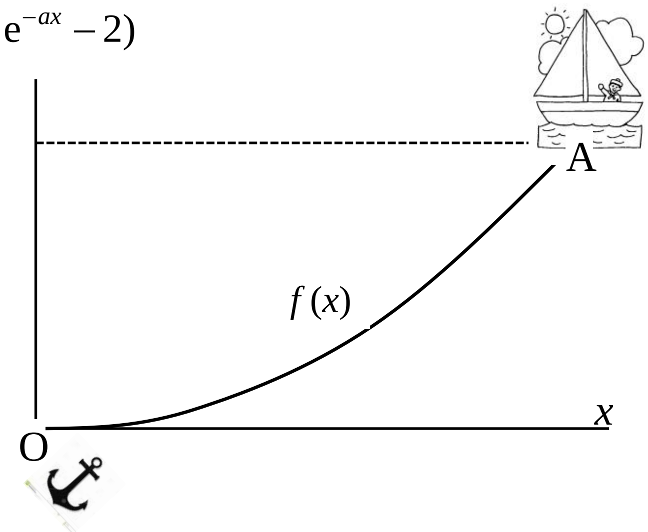
De waterdiepte is: $f(96) = 34$ (m)

De lengte van de ketting is: $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_0^{96} (0{,}5e^{x/140} + 0{,}5e^{-x/140})\, dx$

Met de GR komt hier uit:

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

De waterdiepte is: $f(96) = 34$ (m)

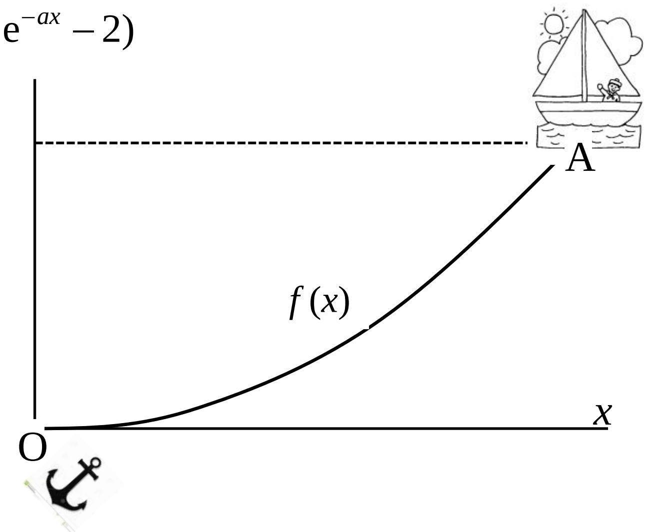
De lengte van de ketting is: $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

```
fnInt(.5e^(X/140
)+.5e^(X/-140),X
,0,96)
            103.702132
```

Met de GR komt hier uit: 103.7 (m)

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \dfrac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

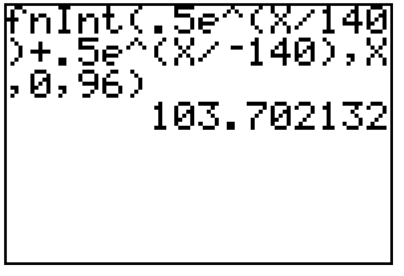
Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

De waterdiepte is: $f(96) = 34$ (m)

De lengte van de ketting is: $\displaystyle\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Met de GR komt hier uit: 103.7 (m)

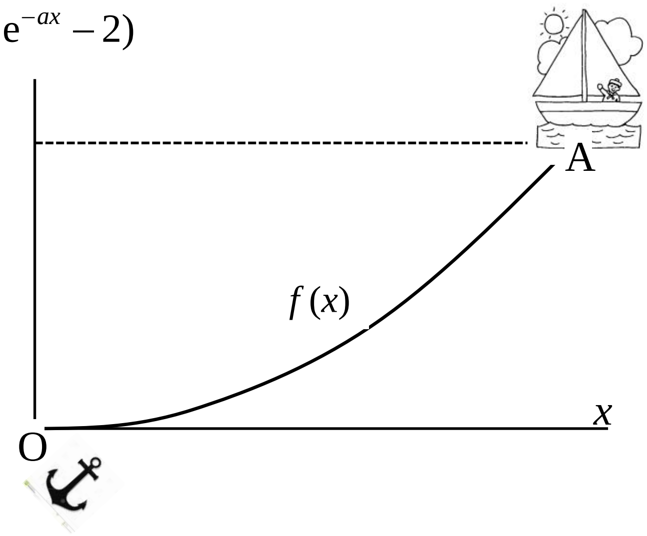


Uit 3 x 34 komt 102 (m)

103.7 > 102 dus de ketting voldoet aan de vuistregel

2014-II Ankerketting

Gegeven voor $a > 0$ de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot (e^{ax} + e^{-ax} - 2)$



x is uitgedrukt in meters.
Gegeven is de plaats van het schip: $x_A = 96$ (meter)
Gegeven is ook : $a = 1/140$

Er is een vuistregel die zegt dat de lengte van de ketting tussen anker en schip minstens driemaal de waterdiepte moet zijn.

Vraag 9. Onderzoek of aan deze vuistregel is voldaan.

De waterdiepte is: $f(96) = 34$ (m)

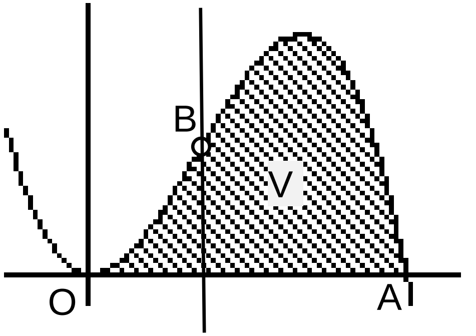
De lengte van de ketting is: $\int_0^{96} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$

Opmerking. Je kunt ook primitiveren: een primitieve van $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{140}x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{140}x}$

is: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{140}} e^{\frac{1}{140}x} + \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{\frac{1}{140}} e^{-\frac{1}{140}x} = 70e^{\frac{1}{140}x} - 80e^{-\frac{1}{140}x}$

Enzovoorts.

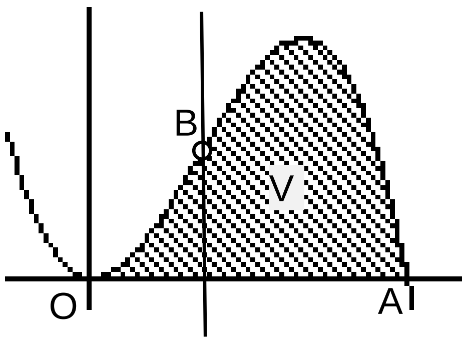
2014-II Acht keer zo groot



Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

2014-II Acht keer zo groot

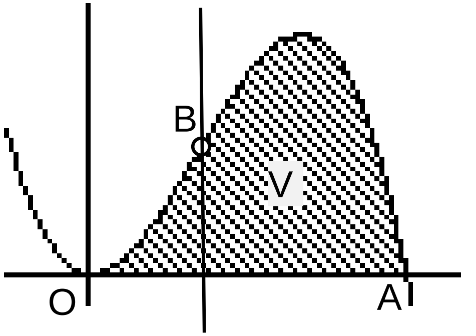


Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

Dus te bewijzen:

2014-II Acht keer zo groot



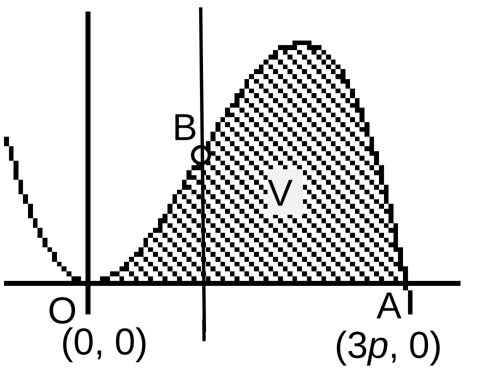
Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer $\frac{3}{4}p^4 = 27/4 \cdot p^4$

Opp. V =

2014-II Acht keer zo groot



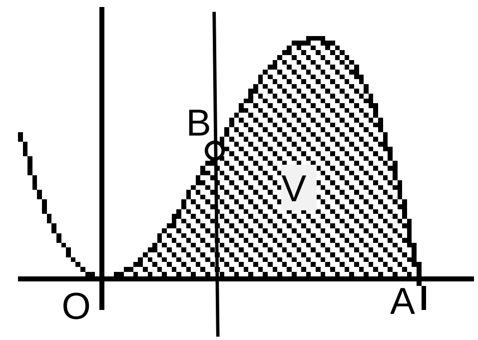
Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer $\frac{3}{4}p^4 = 27/4 \cdot p^4$

Opp. V = $\int_0^{3p} 3px^2 - x^3 \, dx = \left[px^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{3p} = 27p^4 - \frac{81}{4}p^4 = \frac{27}{4}p^4$ Klaar!

2014-II Acht keer zo groot

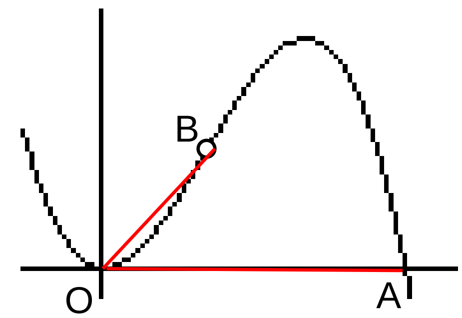


Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4} p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

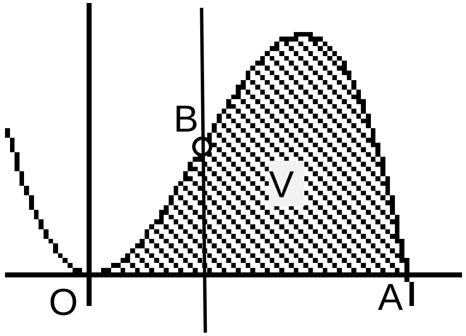
Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer $\frac{3}{4} p^4 = 27/4 \cdot p^4$

Opp. V = $\int_0^{3p} 3px^2 - x^3 \, dx = \left[px^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{3p} = 27p^4 - \frac{81}{4}p^4 = \frac{27}{4}p^4$



Vraag 11. Bereken exact voor welke waarde van p geldt: BO = AO

2014-II Acht keer zo groot

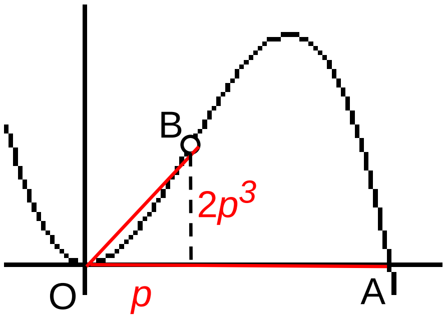


Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer ¾ $p^4 = 27/4 \cdot p^4$

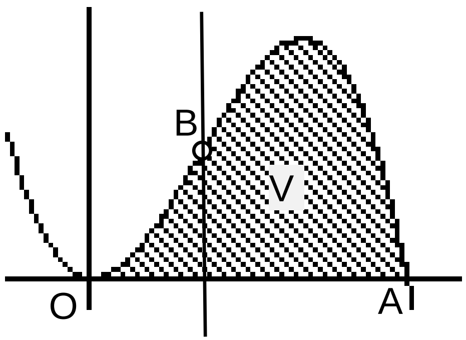
Opp. V = $\int_0^{3p} 3px^2 - x^3\, dx = \left[px^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{3p} = 27p^4 - \frac{81}{4}p^4 = \frac{27}{4}p^4$



Vraag 11. Bereken exact voor welke waarde van p geldt: BO = AO

Oplossing: volgens Pythagoras is

2014-II Acht keer zo groot



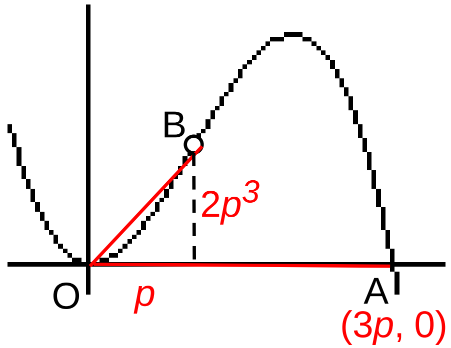
Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4} p^4$.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.

Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer $\frac{3}{4} p^4 = 27/4 \cdot p^4$

$$\text{Opp. V} = \int_0^{3p} 3px^2 - x^3 \, dx = \left[px^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{3p} = 27p^4 - \frac{81}{4}p^4 = \frac{27}{4}p^4$$

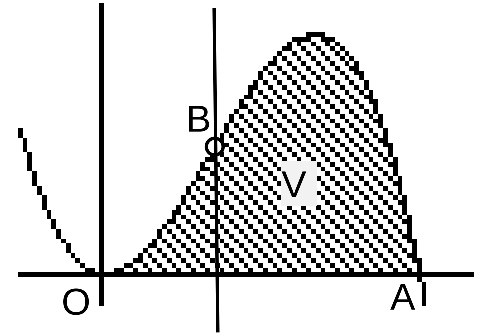
Vraag 11. Bereken exact voor welke waarde van p geldt: BO = AO



Oplossing: volgens Pythagoras is BO = $\sqrt{(p^2 + 4p^6)}$ gelijkstellen aan AO = $3p$.

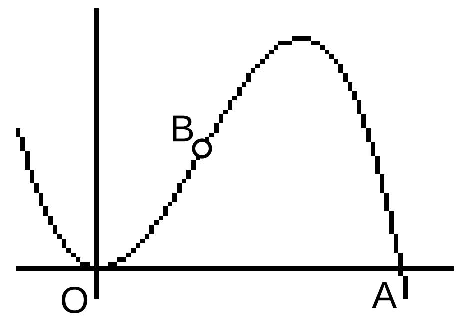
$p^2 + (2p^3)^2$

2014-II Acht keer zo groot



Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is ¾ p^4.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.



Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer ¾ $p^4 = 27/4 \cdot p^4$

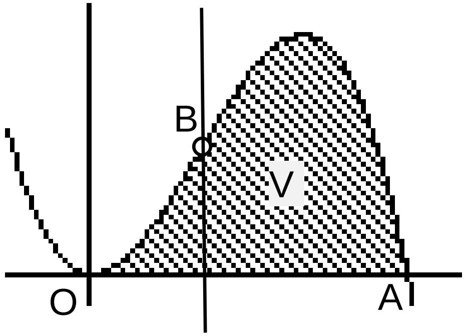
Opp. V = $\int_0^{3p} 3px^2 - x^3 \; dx = \left[px^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{3p} = 27p^4 - \frac{81}{4}p^4 = \frac{27}{4}p^4$

Vraag 11. Bereken exact voor welke waarde van p geldt: BO = AO

Oplossing: volgens Pythagoras is BO = $\sqrt{(p^2 + 4p^6)}$ gelijkstellen aan AO = $3p$.

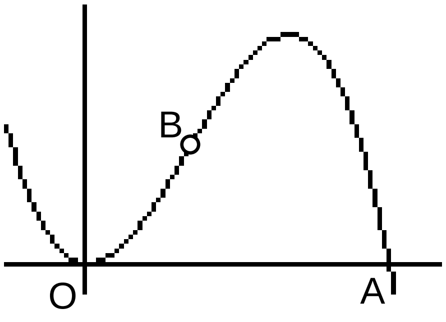
Dus $p^2 + 4p^6 = 9p^2$ geeft

2014-II Acht keer zo groot



Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is ¾ p^4.

Vraag 10. Bewijs dat de oppervlakte van het rechterdeel acht keer zo groot is als de oppervlakte van het linker deel.



Dus te bewijzen: Opp. V = 9 keer ¾ $p^4 = 27/4 \cdot p^4$

$$\text{Opp. V} = \int_0^{3p} 3px^2 - x^3\,dx = \left[px^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^{3p} = 27p^4 - \frac{81}{4}p^4 = \frac{27}{4}p^4$$

Vraag 11. Bereken exact voor welke waarde van p geldt: BO = AO

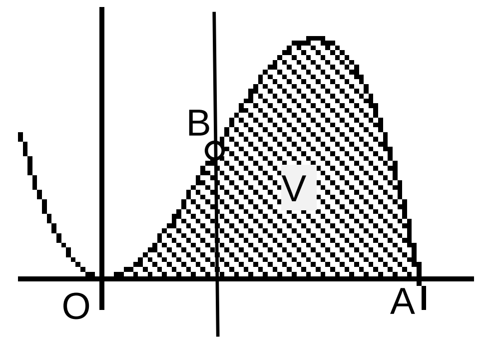
Oplossing: volgens Pythagoras is BO = $\sqrt{(p^2 + 4p^6)}$ gelijkstellen aan AO = $3p$.

Dus $p^2 + 4p^6 = 9p^2$ geeft $4p^6 = 8p^2$ met de oplossing: $p = \sqrt[4]{2}$

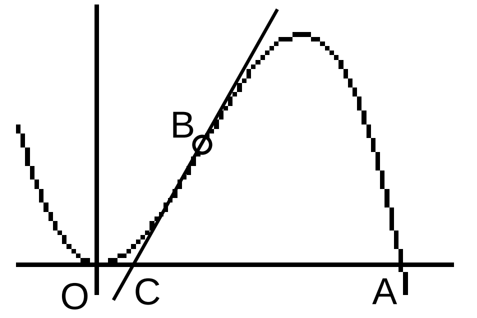
$p^4 = 2$

2014-II Acht keer zo groot

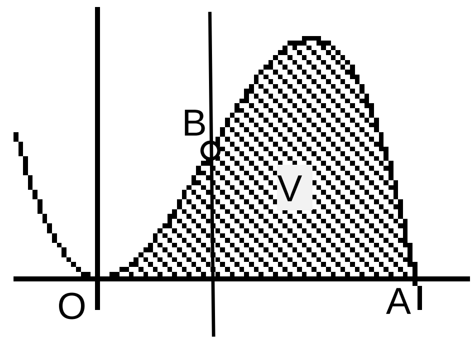
Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is ¾ p^4.



Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.

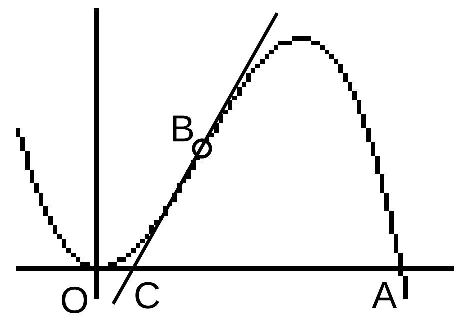


2014-II Acht keer zo groot



Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

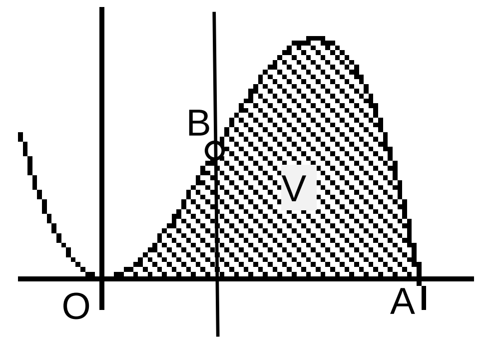
Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



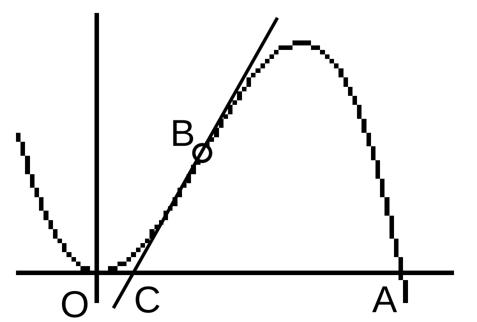
De rico van de raaklijn is:

2014-II Acht keer zo groot

Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4} p^4$.



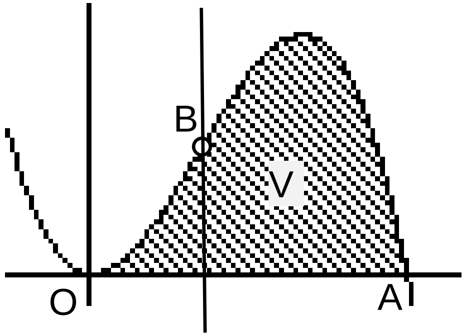
Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



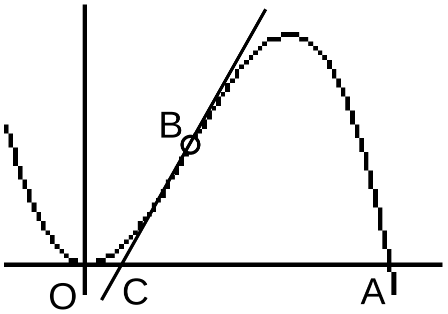
De rico van de raaklijn is: $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

2014-II Acht keer zo groot

Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.



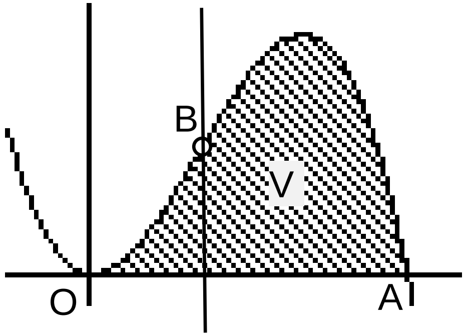
Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



De rico van de raaklijn is: $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

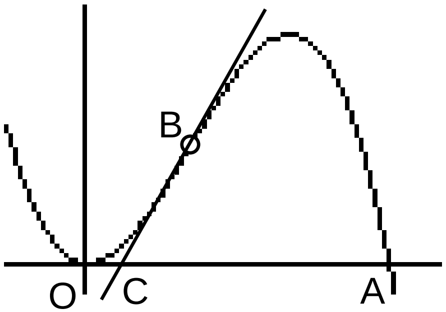
De vergelijking van de raaklijn is:

2014-II Acht keer zo groot



Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



De rico van de raaklijn is: $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

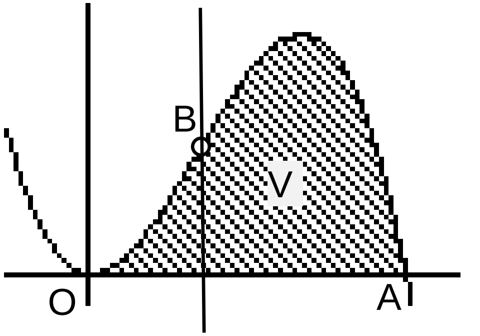
De vergelijking van de raaklijn is: $y = 3p^2x + b$ gaat door $(p, 2p^3)$

$2p^3 = 3p^2p + b$ geeft $b = -p^3$

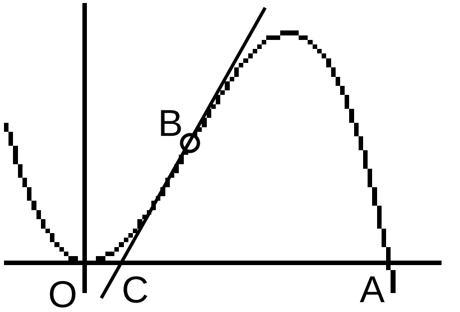
Dus is de vergelijking van de raaklijn: $y = 3p^2x - p^3$

2014-II Acht keer zo groot

Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4} p^4$.



Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



De rico van de raaklijn is: $f_p{}'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

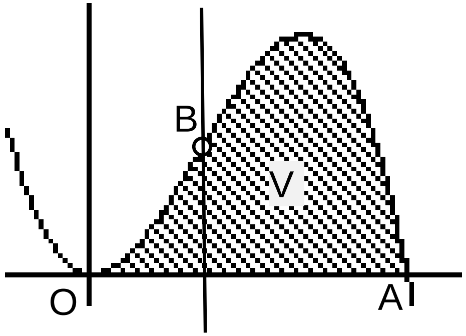
De vergelijking van de raaklijn is: $y = 3p^2x + b$ gaat door (p, $2p^3$)

$$2p^3 = 3p^2p + b \text{ geeft } b = -p^3$$

Dus is de vergelijking van de raaklijn: $y = 3p^2x - p^3$

Snijdt de x-as in

2014-II Acht keer zo groot



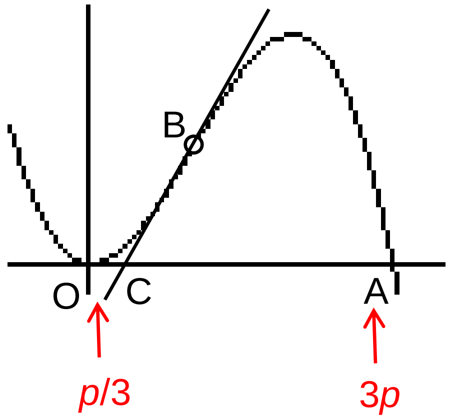
Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is $\frac{3}{4}p^4$.

Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.

De rico van de raaklijn is: $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 3p^2x + b$ gaat door $(p, 2p^3)$

$$2p^3 = 3p^2p + b \text{ geeft } b = -p^3$$

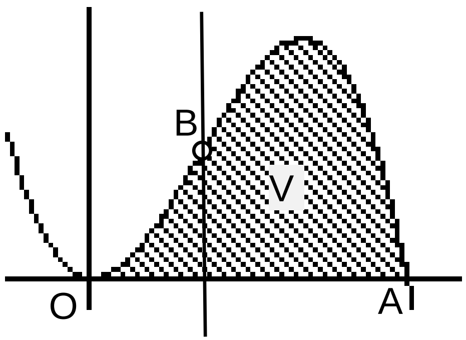


Dus is de vergelijking van de raaklijn: $y = 3p^2x - p^3$

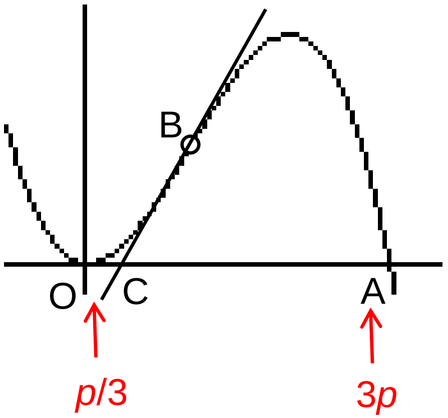
Snijdt de x-as in C $(\frac{1}{3}p, 0)$ dus is OC = $p/3$

2014-II   Acht keer zo groot

Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is ¾ p^4.



Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



De rico van de raaklijn is: $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 3p^2x + b$ gaat door (p, $2p^3$)

$$2p^3 = 3p^2p + b \text{ geeft } b = -p^3$$

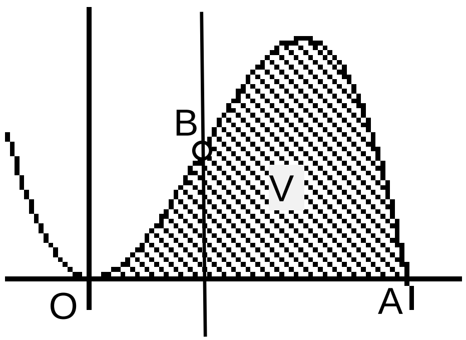
Dus is de vergelijking van de raaklijn: $y = 3p^2x - p^3$

Snijdt de x-as in C $(\frac{1}{3}p, 0)$ dus is OC = $p/3$

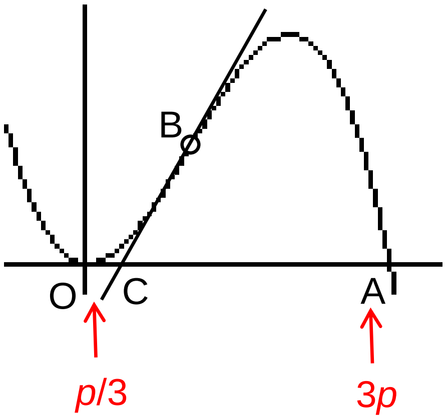
OA = $3p$ is dus 9 × OC dus is

2014-II Acht keer zo groot

Voor $p > 0$ is gegeven de grafiek van $f_p(x) = 3px^2 - x^3$.
A($3p$, 0) is snijpunt met de x-as; B(p, $2p^3$) is het buigpunt.
V is het gebied dat ingesloten wordt door de grafiek van f_p en de x-as. De verticale lijn door B verdeelt V in twee delen.
De oppervlakte van het linkerdeel is ¾ p^4.



Vraag 12. De buigraaklijn in B snijdt de x-as in C.
Bewijs dat CA = 8 × OC voor elke waarde van $p > 0$.



De rico van de raaklijn is: $f_p'(x) = 6px - 3x^2$ met $x = p$
Dus: rico $= 6p^2 - 3p^2 = 3p^2$

De vergelijking van de raaklijn is: $y = 3p^2x + b$ gaat door (p, $2p^3$)

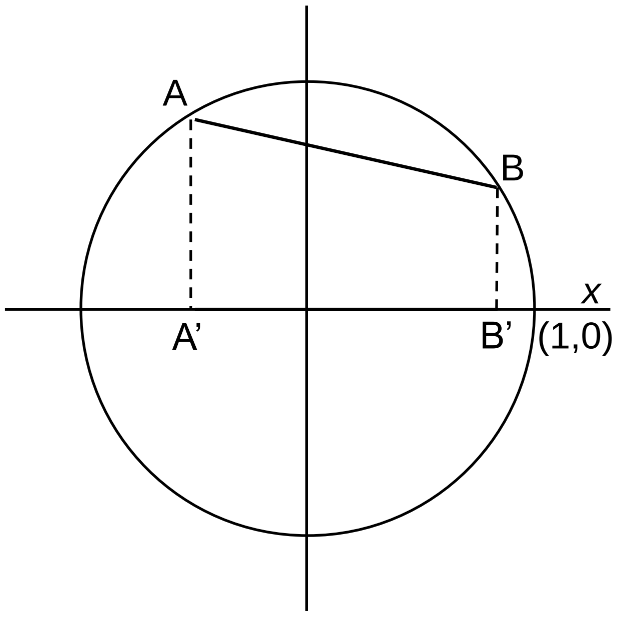
$$2p^3 = 3p^2p + b \text{ geeft } b = -p^3$$

Dus is de vergelijking van de raaklijn: $y = 3p^2x - p^3$

Snijdt de x-as in C $(\frac{1}{3}p, 0)$ dus is OC = $p/3$

OA = $3p$ is dus 9 × OC dus is CA = 8 × OC

2014-II Twee bewegende punten

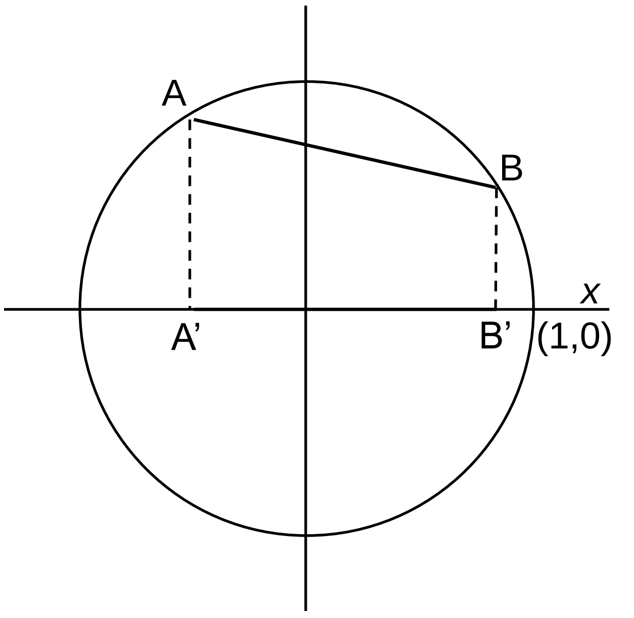


Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de *x*-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 13. Bereken de maximale lengte van A'B'

2014-II Twee bewegende punten

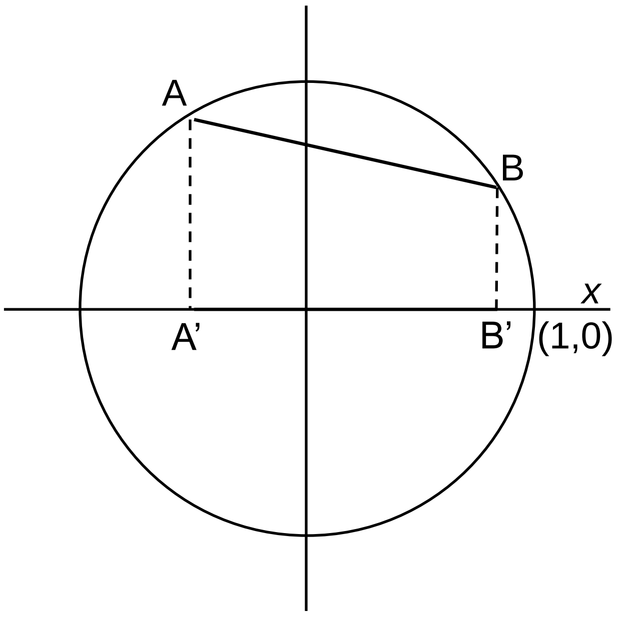


Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A’ en B’ zijn de loodrechte projecties van A en B op de *x*-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 13. Bereken de maximale lengte van A’B’
|A’B’|=

2014-II Twee bewegende punten

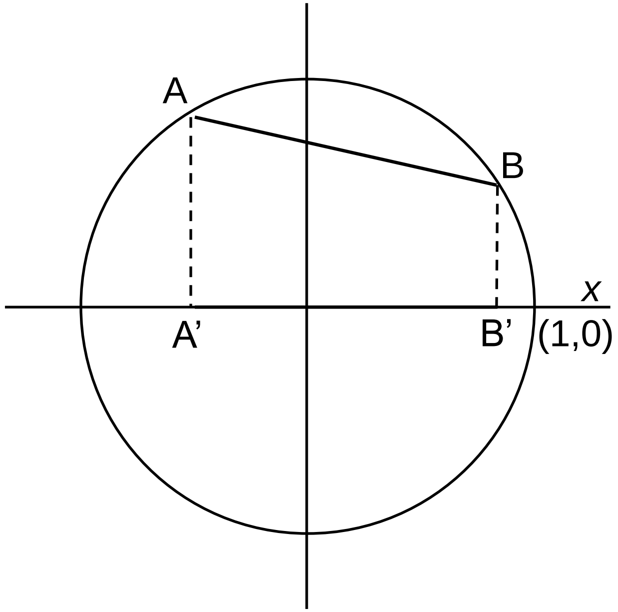


Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de *x*-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 13. Bereken de maximale lengte van A'B'
$|A'B'| = |\cos(t) - \cos(3t)|$

2014-II Twee bewegende punten

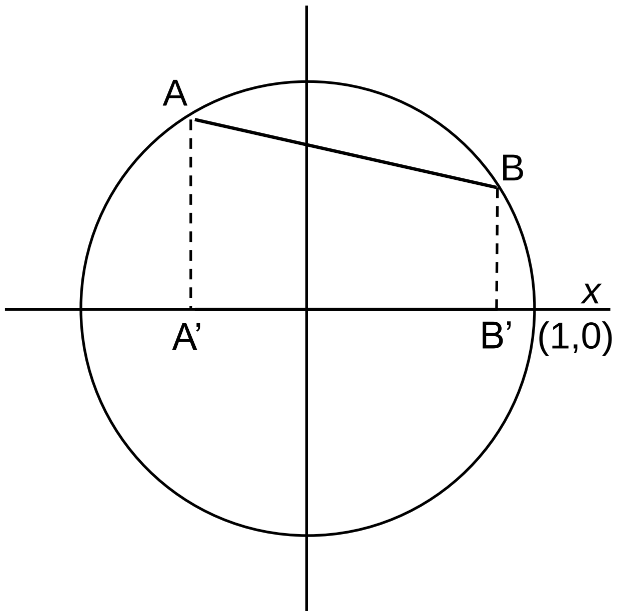


Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 13. Bereken de maximale lengte van A'B'
|A'B'|= | cos(t) – cos(3t) |
Oplossen mag met de GR, bijv. via CALC maximum Y1 [= abs(cos(X)-cos(3X))]

2014-II Twee bewegende punten

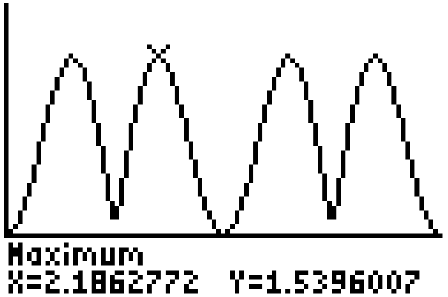


Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de *x*-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

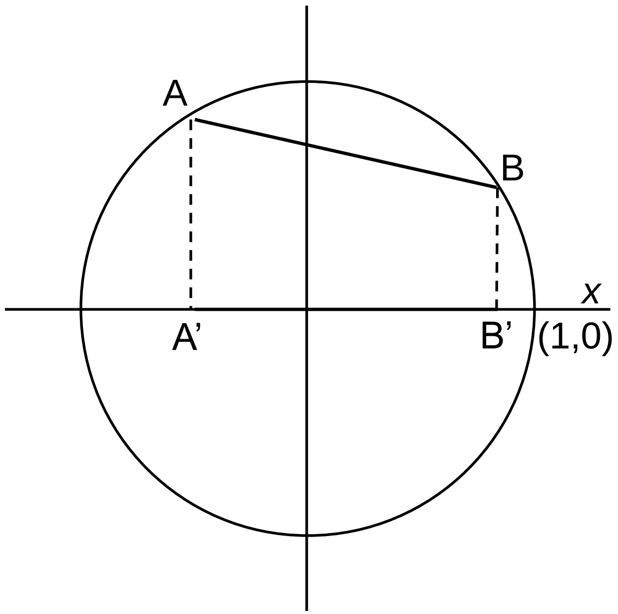
$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 13. Bereken de maximale lengte van A'B'
|A'B'|= | cos(t) – cos(3t) |
Oplossen mag met de GR, bijv. via CALC maximum Y1 [= abs(cos(X)-cos(3X))]

Je moet eigenlijk 4 keer het maximum bepalen. Die blijken alle vier even hoog, namelijk 1,54



2014-II Twee bewegende punten



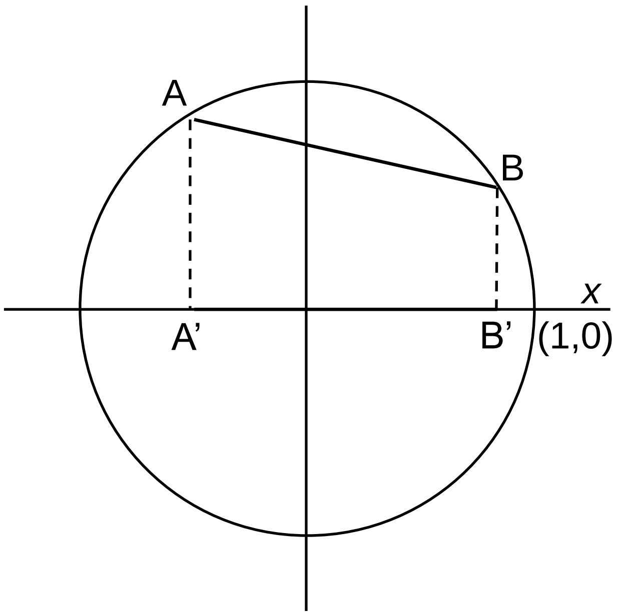
Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 14. Bewijs dat de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

De rico =

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

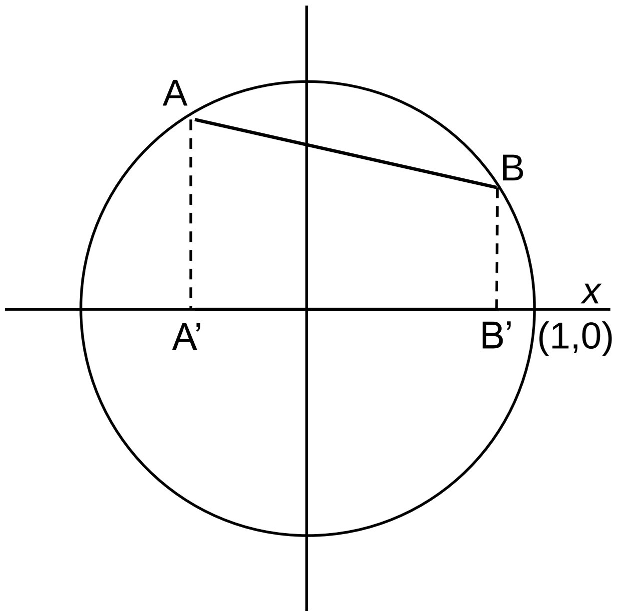
$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 14. Bewijs dat de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

De rico = $\dfrac{\sin(3t) - \sin(t)}{\cos(3t) - \cos(t)}$ of $\dfrac{\sin(t) - \sin(3t)}{\cos(t) - \cos(3t)}$

$\text{rico} = \dfrac{y_A(t) - y_B(t)}{x_A(t) - x_B(t)}$ $\quad A(\cos 3t, \sin 3t)$ en $B(\cos t, \sin t)$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de *x*-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

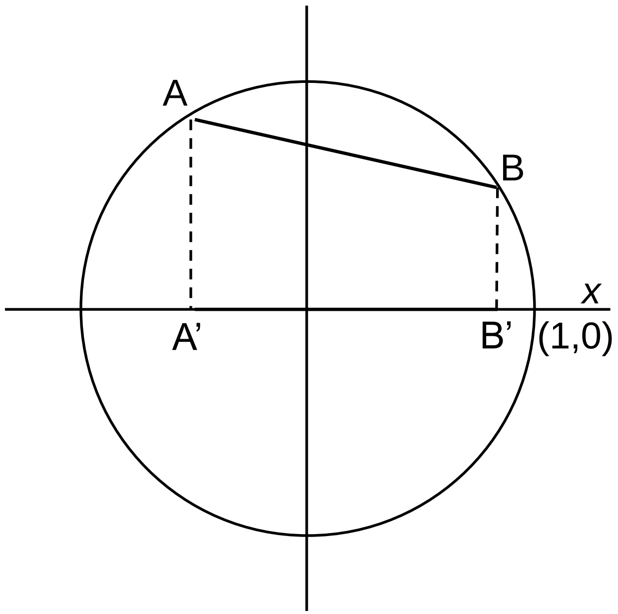
Vraag 14. Bewijs dat de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

De rico = $\dfrac{\sin(3t) - \sin(t)}{\cos(3t) - \cos(t)}$ of $\dfrac{\sin(t) - \sin(3t)}{\cos(t) - \cos(3t)}$

$\sin(3t) - \sin(t) = 2\sin(t)\cdot\cos(2t)$ volgt uit de formule: sin A – sin B = 2 sin ½(A–B)·cos ½(A+B)

Formule: $2\sin(\dfrac{3t-t}{2})\cos(\dfrac{3t+t}{2}) = 2\sin(\dfrac{2t}{2})\cos(\dfrac{4t}{2}) = 2\sin(t)\cos(2t)$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

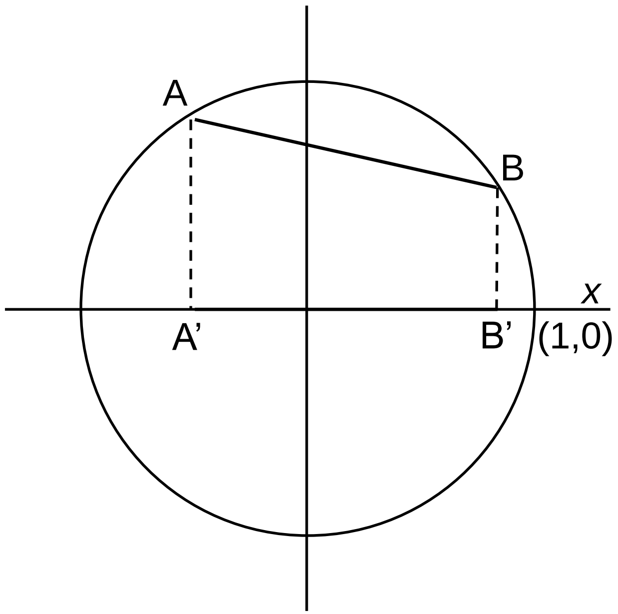
Vraag 14. Bewijs dat de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

De rico = $\dfrac{\sin(3t) - \sin(t)}{\cos(3t) - \cos(t)}$ of $\dfrac{\sin(t) - \sin(3t)}{\cos(t) - \cos(3t)}$

$\sin(3t) - \sin(t) = 2\sin(t)\cdot\cos(2t)$
$\cos(3t) - \cos(t) = -2\sin(2t)\cdot\sin(t)$ volgt uit de formule: $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\sin\frac{1}{2}(A-B)$

Formule $-2\sin(\frac{3t+t}{2})\sin(\frac{3t-t}{2}) = -2\sin(\frac{4t}{2})\sin(\frac{2t}{2}) = -2\sin(2t)\sin(t)$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

Vraag 14. Bewijs dat de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

De rico = $\dfrac{\sin(3t) - \sin(t)}{\cos(3t) - \cos(t)}$ of $\dfrac{\sin(t) - \sin(3t)}{\cos(t) - \cos(3t)}$

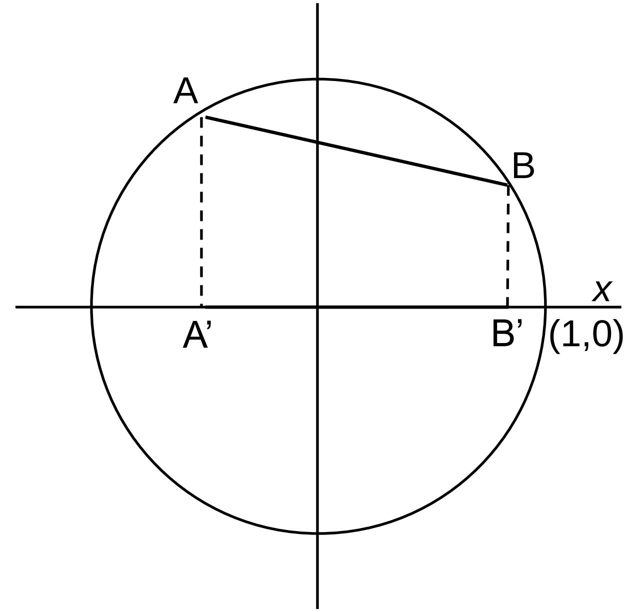
$\sin(3t) - \sin(t) = 2\sin(t)\cdot\cos(2t)$
$\cos(3t) - \cos(t) = -2\sin(2t)\cdot\sin(t)$

Dus $a = \dfrac{\cancel{2}\cancel{\sin(t)}\cdot\cos(2t)}{-\cancel{2}\sin(2t)\cdot\cancel{\sin(t)}} = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Een paar gonio formules bij vraag 15

- $\sin A = \cos(\frac{1}{2}\pi - A)$
- $\cos A = \sin(\frac{1}{2}\pi - A)$
- $\sin A = \sin B$ heeft oplossingen: $A = B + 2k\pi$ en $A = \pi - B + 2k\pi$
- $\cos A = \cos B$ heeft oplossingen: $A = B + 2k\pi$ en $A = -B + 2k\pi$
- $\tan A = \tan B$ heeft oplossingen: $A = B + k\pi$

2014-II Twee bewegende punten



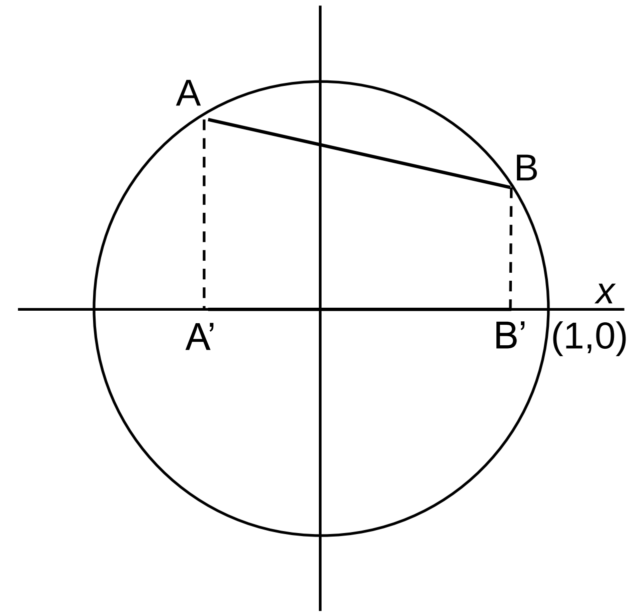
Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A’ en B’ zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

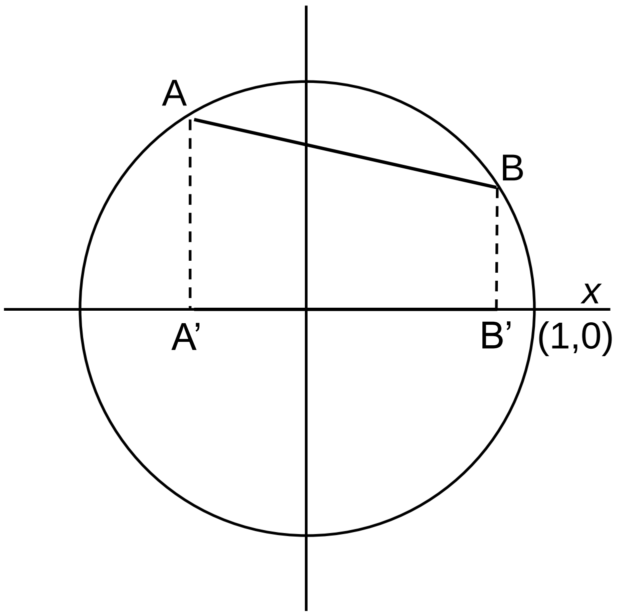
$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

$a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = 1$ Twee manieren. Eerste manier: $\tan(2t) = 1$ oplossen.

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

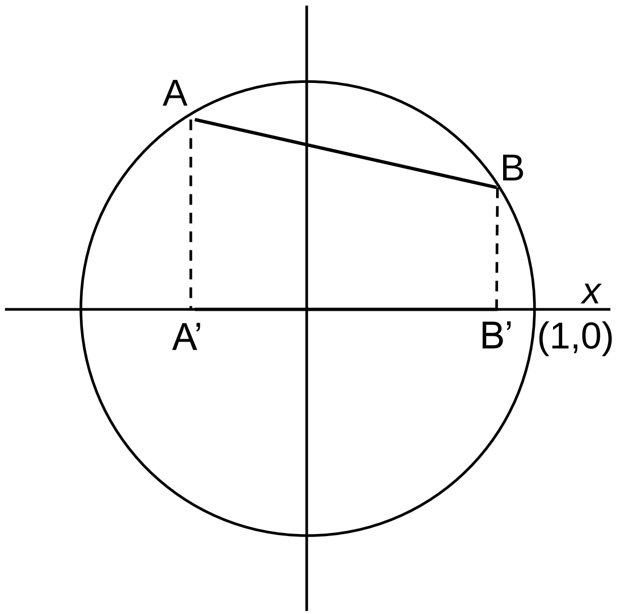
de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

$a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = 1$ Twee manieren. Eerste manier: tan(2t) = 1 oplossen.

$$2t = \frac{1}{4}\pi + k\cdot\pi \ \rightarrow\ t = \frac{1}{8}\pi,\ t = \frac{5}{8}\pi,\ t = 1\frac{1}{8}\pi,\ t = 1\frac{5}{8}\pi$$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

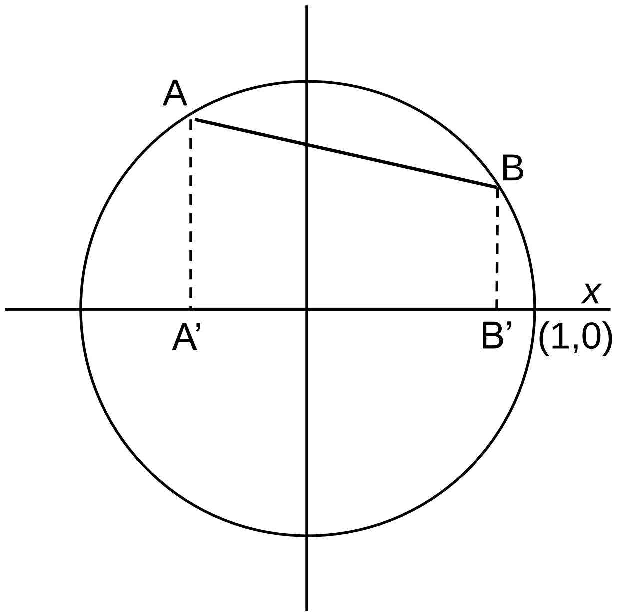
$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

$a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = 1$ Tweede manier: $\cos(2t) = \sin(2t) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 2t)$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

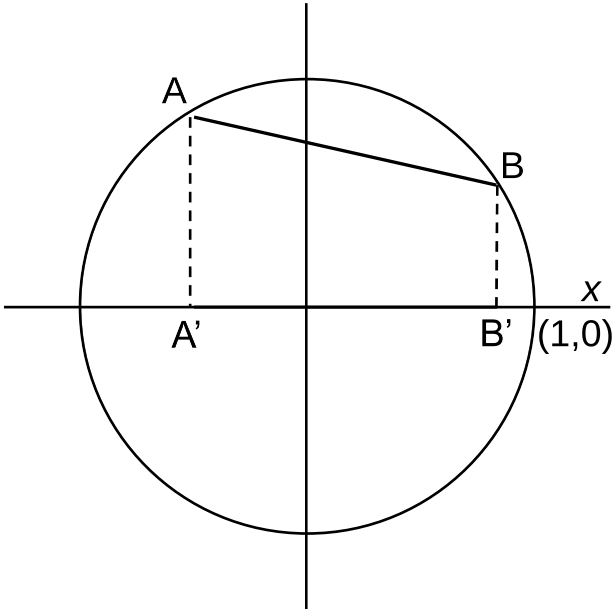
$$a = -\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1 \quad \text{geeft} \quad \frac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = 1$$

Tweede manier: $\cos(2t) = \sin(2t) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - 2t)$

$\cos A = \cos B$

$A = B + 2k\pi$ of $A = -B + 2k\pi$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

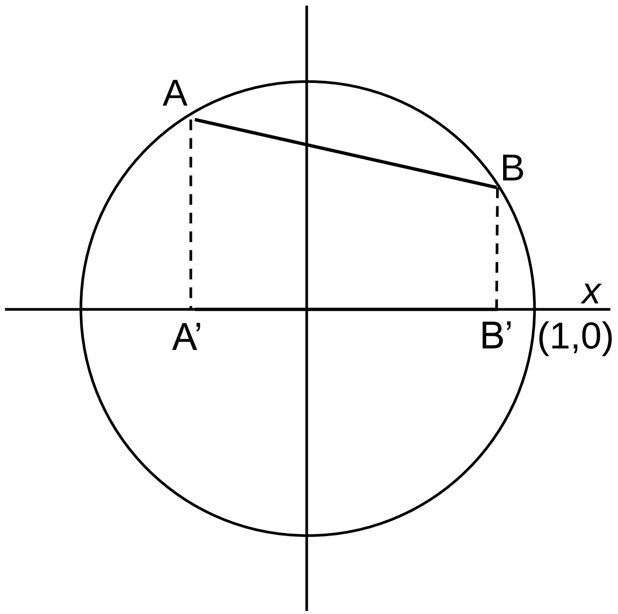
$a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = 1$ Tweede manier: $\cos(2t) = \sin(2t) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 2t)$

$\cos A = \cos B$

$A = B + 2k\pi$ of $A = -B + 2k\pi$

Dus: $2t = \frac{1}{2}\pi - 2t + 2k\pi$ of $2t = -\frac{1}{2}\pi + 2t + 2k\pi$

2014-II Twee bewegende punten



Over de eenheidscirkel bewegen de punten A en B. Op $t = 0$ bevinden beide punten zich in (1, 0). Ze bewegen met constante snelheid waarbij de snelheid van A drie keer zo groot is als de snelheid van B. We nemen $0 < t < 2\pi$.
A' en B' zijn de loodrechte projecties van A en B op de x-as.
De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A(t) = \cos(3t) \\ y_A(t) = \sin(3t) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B(t) = \cos(t) \\ y_B(t) = \sin(t) \end{cases}$$

de richtingscoëfficiënt (a) van AB gelijk is aan: $a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$

Vraag 15. Er zijn vier waarden van t, waarvoor koorde AB evenwijdig met de lijn $y = -x$.
Bereken exact deze vier waarden.

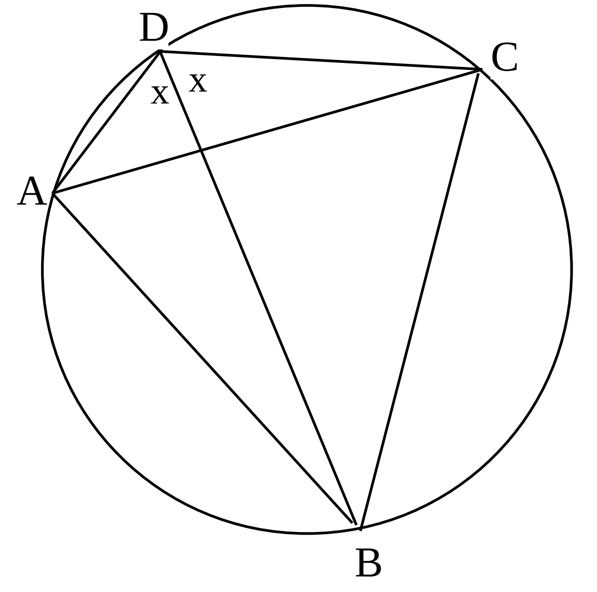
$a = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = -1$ geeft $\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} = 1$

Tweede manier: $\cos(2t) = \sin(2t) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 2t)$
$\cos A = \cos B$
$A = B + 2k\pi$ of $A = -B + 2k\pi$

Dus: $2t = \frac{1}{2}\pi - 2t + 2k\pi$ of $2t = -\frac{1}{2}\pi + 2t + 2k\pi$
Opl.: $4t = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ of $0 = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ (geeft geen oplossingen)

$t = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi \rightarrow t = \frac{1}{8}\pi,\ t = \frac{5}{8}\pi,\ t = 1\frac{1}{8}\pi,\ t = 1\frac{5}{8}\pi$

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken



Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek ABCD.
BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken.

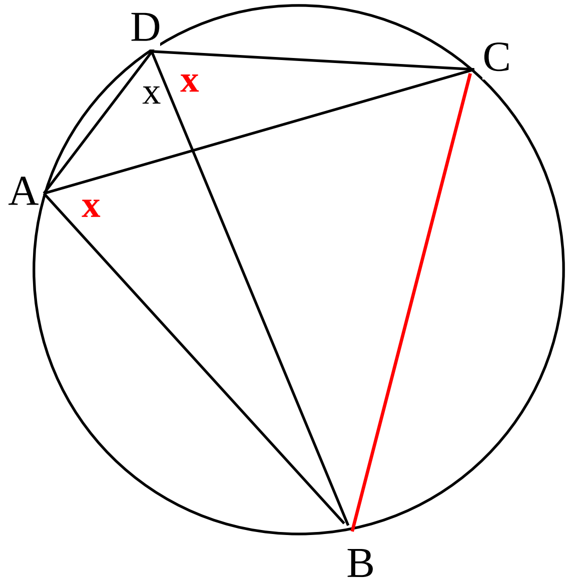
Vraag 16. Bewijs dat AB = BC.

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek ABCD.
BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken.

Vraag 16. Bewijs dat AB = BC.

- $\angle$BAC = $\angle$BDC (*constante hoek op koorde BC*)

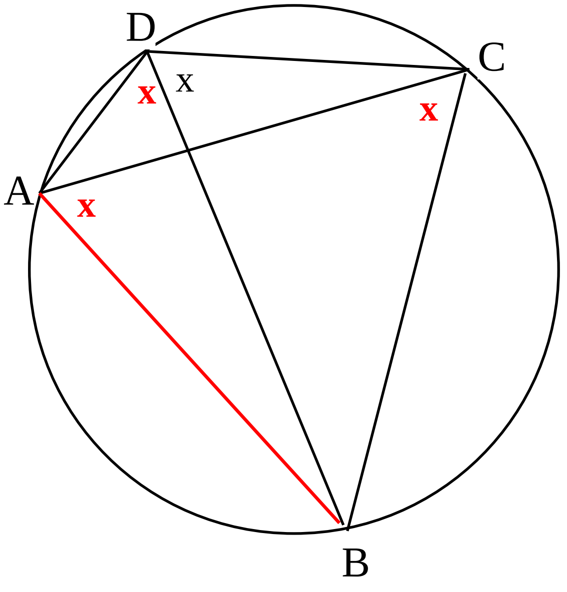


2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

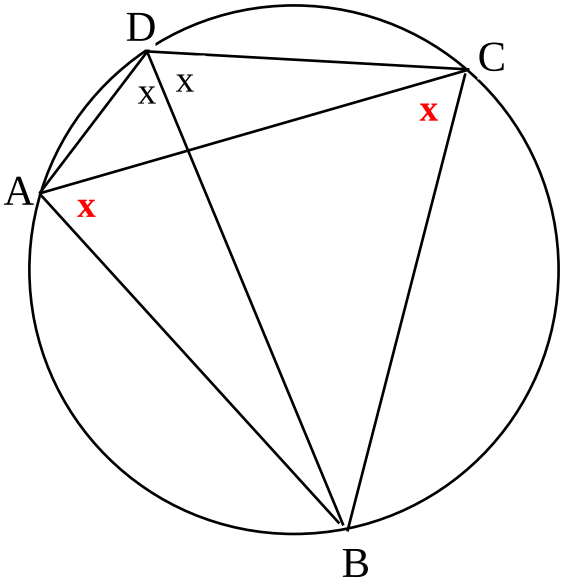
Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek ABCD.
BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken.

Vraag 16. Bewijs dat AB = BC.

- ∠BAC = ∠BDC (*constante hoek op koorde BC*)
- ∠BCA = ∠BDA (*constante hoek op koorde AB*)



2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

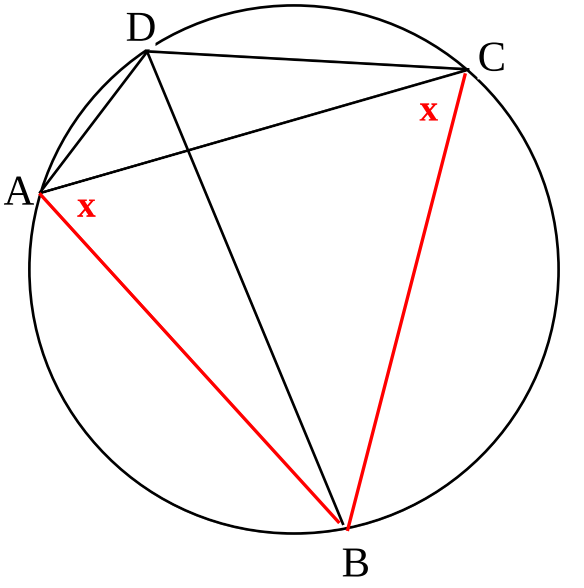


Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek ABCD.
BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken.

Vraag 16. Bewijs dat AB = BC.

- ∠BAC = ∠BDC (*constante hoek op koorde BC*)
- ∠BCA = ∠BDA (*constante hoek op koorde AB*)
- Dus is ∠BAC = ∠BCA

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken



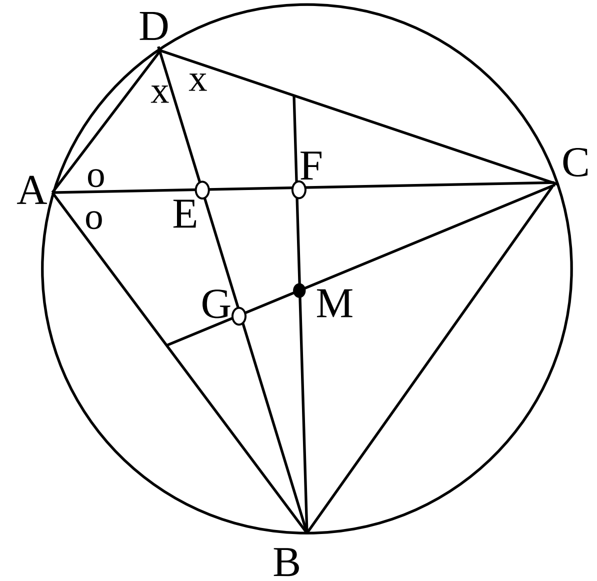
Gegeven is een cirkel met koordenvierhoek ABCD.
BD verdeelt hoek ADC in twee gelijke hoeken.

Vraag 16. Bewijs dat AB = BC.

- $\angle$BAC = $\angle$BDC (*constante hoek op koorde BC*)
- $\angle$BCA = $\angle$BDA (*constante hoek op koorde AB*)
- Dus is $\angle$BAC = $\angle$BCA
- Dus is AB = BC (*gelijkbenige driehoek*)

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

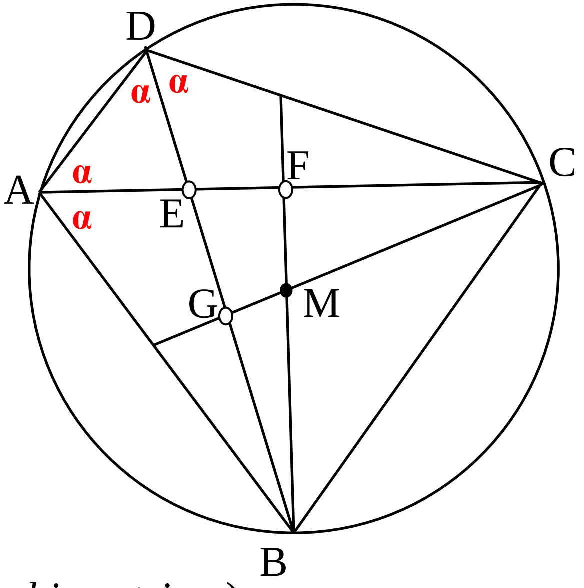
Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt $\angle ADC$ in twee gelijke hoeken
AC verdeelt $\angle BAD$ in twee gelijke hoeken
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.



Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

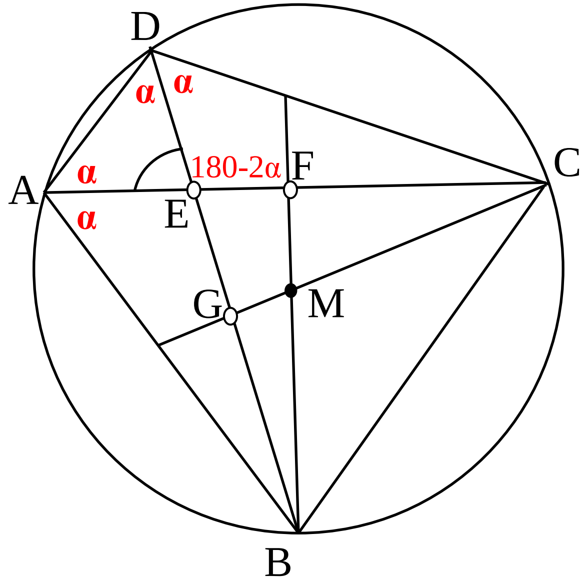
Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken.
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken.
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.



Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

- De vier hoeken, aangegeven met α zijn gelijk (*constante hoek*, *bissectrices*)

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken



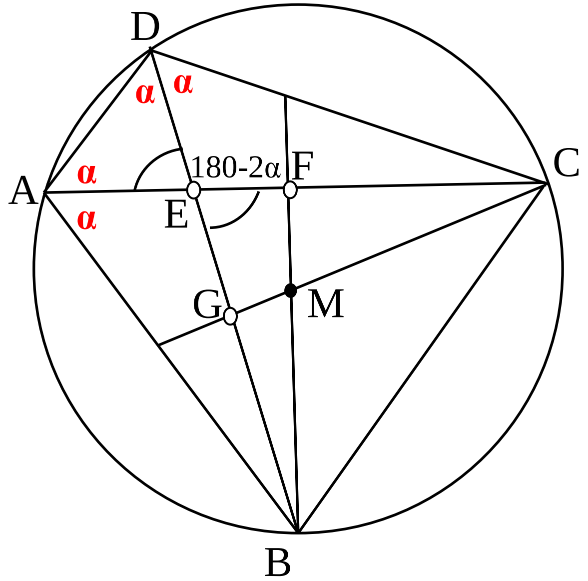
Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken.
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken.
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.

Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

- De vier hoeken, aangegeven met α zijn gelijk (*constante hoek*, *bissectrices*)
- Hoek AED (met het boogje) is $180^o - 2\alpha$ (*hoekensom*)

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

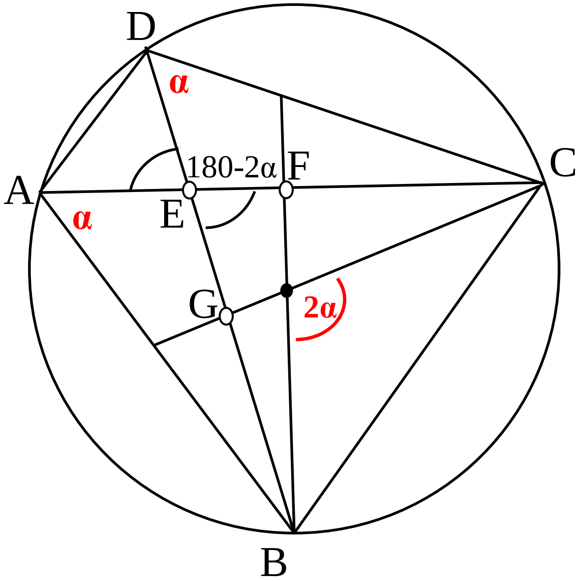
Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken.
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken.
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.



Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

- De vier hoeken, aangegeven met α zijn gelijk (*constante hoek*, *bissectrices*)
- Hoek AED (met het boogje) is $180^o - 2\alpha$ (*hoekensom*)
- Hoek BEC is ook $180^o - 2\alpha$ (*overstaande hoeken*)

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

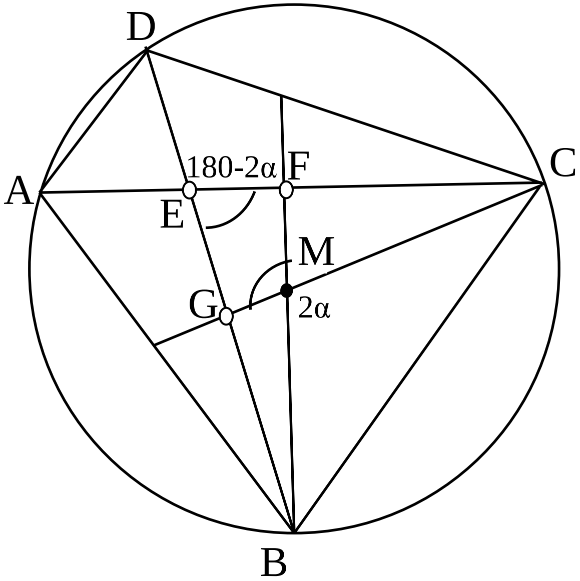


Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken.
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken.
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.

Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

- De vier hoeken, aangegeven met **α** zijn gelijk (*constante hoek*, *bissectrices*)
- Hoek AED (met het boogje) is $180^o - 2\alpha$ (*hoekensom*)
- Hoek BEC is ook $180^o - 2\alpha$ (*overstaande hoeken*)
- De hoek bij M is 2α (*middelpuntshoek op boog BC, is* 2 *keer omtrekshoek α, ook op boog BC*)

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

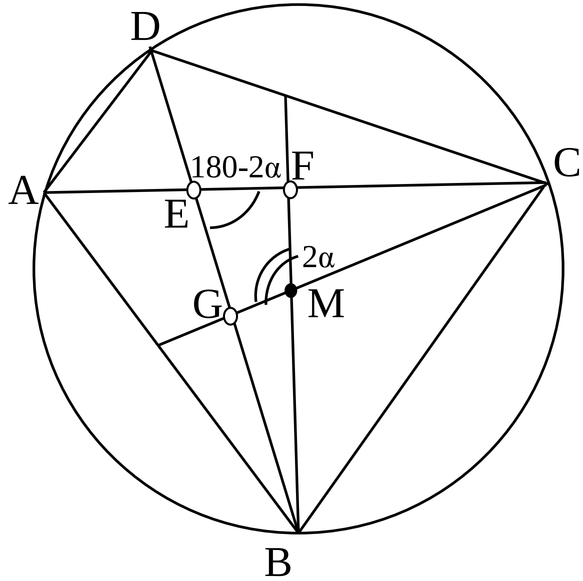


Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken.
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken.
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.

Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

- De vier hoeken, aangegeven met **α** zijn gelijk (*constante hoek*, *bissectrices*)
- Hoek AED (met het boogje) is $180^o - 2\alpha$ (*hoekensom*)
- Hoek BEC is ook $180^o - 2\alpha$ (*overstaande hoeken*)
- De hoek bij M is 2α (*middelpuntshoek op boog BC, is* 2 *keer omtrekshoek α, ook op boog BC*)
- Overstaande hoeken bij M

2014-II Diagonalen en gelijke hoeken

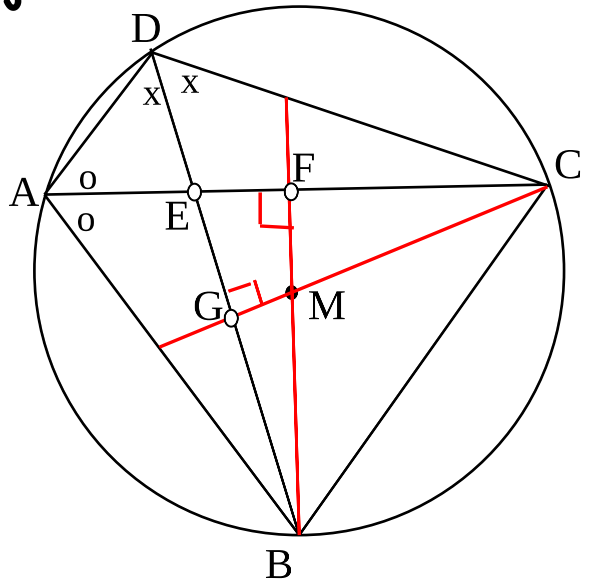


Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken.
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken.
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.

Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

- De vier hoeken, aangegeven met **α** zijn gelijk (*constante hoek*, *bissectrices*)
- Hoek AED (met het boogje) is $180^o - 2\alpha$ (*hoekensom*)
- Hoek BEC is ook $180^o - 2\alpha$ (*overstaande hoeken*)
- De hoek bij M is 2α (*middelpuntshoek op boog BC, is* 2 *keer omtrekshoek α, ook op boog BC*)
- Overstaande hoeken bij M
- De hoeken bij E en M zijn samen $180^o - 2\alpha + 2\alpha = 180^o$.
- EFMG is dus een koordenvierhoek (*koordenvierhoekstelling*).

2014-II Vraag 17: een alternatief bewijs



Gegeven is weer een cirkel met een koordenvierhoek ABCD met M als middelpunt.
BD verdeelt ∠ADC in twee gelijke hoeken
AC verdeelt ∠BAD in twee gelijke hoeken
BD en AC snijden elkaar in E.
Lijn BM snijdt AC in F; lijn CM snijdt BD in G.

Vraag 17. Bewijs dat E, F, M en G op één cirkel liggen.

Een alternatief bewijs krijg je, gebruikmakend van de gelijkbenige driehoeken ABC en BCD (bij de vorige vraag bewezen).
M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van deze driehoeken.
Dus zijn BF en CG **(middel)loodlijnen** in deze driehoeken.
Daaruit volgt, dat de hoeken F en G 90^o zijn.

EFGM is dan een koordenvierhoek op grond van de **stelling van Thales**.