MET DE KENNIS VAN NU is gekeken naar zeven examens wiskunde (B) van de vorige eeuw, met name de analyse, door de ogen van de leraar anno nu die ooit zelf zo'n examen moest doorstaan. Is er veel veranderd wat het niveau, de inhoud, de omvang en de kwaliteit van die examens betreft? Het onderdeel meetkunde is een verhaal apart. Via stereometrie, beschrijvende meetkunde (jaren '50), vectormeetkunde (jaren '70), lineaire vectorruimten ('70), stereometrie ('90), terug naar Planimetrie ('00) en straks van de koordenvierhoeken terug naar de kegelsneden was het (naar mijn idee) een vruchteloze zoektocht naar zinvolle (bruikbare) wiskunde. Met uitzondering van de vectorrekening. Ik heb een aantal examens globaal en vluchtig doorgewerkt. Bij voorbaat mijn excuus voor rekenfouten en slordigheden.

HBS B 1959 (leerling toen 17 jaar, leraar nu 72 jaar)

Trigonometrie opent met een vreselijk moeilijke opgave (vind ik nu nog) , waar in één opgave de kennis over een omtrekshoek die de helft is van de bijbehorende boog, de oppervlakte van een driehoek op drie manieren en alle somformules (ook voor de tangens) een rol spelen.
Ook opgave 2 met een koordenvierhoek (met de stelling van Thales), gelijke omtrekshoeken, de sinusregel en wederom een somregel vereist veel inventiviteit en grote formulekennis.
Opgave 3 (zou, afgezien van de absolute waarde en de graden i.p.v. radialen) tegenwoordig gevraagd kunnen worden, is wel een stapeling van moeilijkheden.
Som 3b is afhankelijk van 3a, een onvolkomenheid in meer oude examens. Daar staat wel tegenover dat de leraar een grote vrijheid had om punten toe te kennen voor een redelijk verhaal. Een uitgewerkt correctievoorschrift kende men niet in die tijd.
Daarmee valt direct de onevenwichtigheid op. Een examen beginnen met de moeilijkste opgave en eindigen met een makkelijke opgave, is tegenwoordig terecht uit den boze.

Algebra opent met een opgave over een sommeerbare meetkundige rij (reeks genoemd). De drie subvragen zijn sterk afhankelijk, aan de algebraïsche vaardigheid worden hoge eisen gesteld (zoals eigenlijk bij alle algebraïsche opgaven in het pre-tweedefase tijdperk).
Opgave 2 heeft logaritmische vergelijkingen met grondtal 3 en grondtal 1/3 (daartussen bestaat een verband dat tegenwoordig niet meer behandeld wordt). Tamelijk lastig.
Opgave 3 bevat weer volop absoluutstrepen. Voor wie het trucje kent is dat een makkelijke opgave. Zeer opvallend is weer de onderlinge afhankelijkheid en stapeling van de subvragen.

Stereometrie en Beschrijvende Meetkunde zijn onderdelen die het uiterste vergen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Met name het laatstgenoemde onderdeel (de drie aanzichten van een lichaam in één tekening, speciaal voor technische tekenaars bedoeld en niet op het gymnasium gevraagd) was een berucht struikelblok. Men moet zich wel realiseren dat in de jaren vijftig een sterke voorselectie op begaafdheid heerste. Deze meetkunde examens heb ik niet bekeken, omdat ze gaandeweg steeds minder belangrijk werden.

HBS B 1971 (leerling toen 17 jaar, leraar nu 60 jaar)

Goniometrie en Analytische Meetkunde.
Opgave 1. Zwaartepunt van een driehoek = gemiddelde van de coördinaten; het begrip poollijn overviel mij – dat was ik na die tijd niet meer tegengekomen in de examens. Hetzelfde voor het 'links en rechts coëfficiënten vergelijken', cirkelbundels en lijnenbundels in opgave 2 die ik knap lastig vond, 42 jaar na dato.
Opgave 3a, over twee goniometrische grafieken die elkaar raken in een gegeven punt, deed denken aan een opgave uit het examen wiskunde B VWO 2014 die landelijk slecht gemaakt werd. De opgave uit 1971 was nog een stuk zwaarder te verteren. En dat geldt nog sterker voor opgave 3b, waar een goniometrische ongelijkheid moet worden opgelost met ontbinden en een tekenschema.
Dit examen vond ik veel meer in balans dan de oudere examens. Met name afhankelijkheid van de subvragen komt hier niet meer voor. We moeten ons realiseren dat in 1971 het formuleblad en de (grafische) rekenmachine nog niet uitgevonden waren en gekunstelde contexten ontbraken. Het hele examen paste op één A4tje.
De onderwerpen zijn wat 'moderner' en herkenbaarder dan die van de oude examens, waardoor het niveau wat beter te vergelijken is met dat uit de recente examens wiskunde B VWO. De conclusie is duidelijk: het technische niveau lag in 1971 een stuk hoger dan in 2014. Om welke reden of oorzaak dan ook.

HAVO wiskunde 1976 (leerling toen 17 jaar, leraar nu 57 jaar, aangenomen dat veel havisten doorstroomden naar 5 en 6 VWO en daarna de lerarenopleiding volgden). Meer dan de helft van de havisten had wiskunde in het pakket.

Deze HAVO examens zijn in mijn ogen meesterwerkjes van beknoptheid en duidelijkheid. Het niveau van de algebra schat ik aanmerkelijk hoger dan het huidige VWO wiskunde B niveau. Weliswaar kwamen primitiveren en e-machten, evenals tegenwoordig, niet voor op de HAVO uit de jaren '70. Geen formuleblad, geen grafische rekenmachine, geen contexten. Een heel examen (2,5 uur, vijf opgaven, 15 subvragen) op één blaadje. Ik heb zeven complete opgaven bekeken om een goed overzicht te krijgen.
Getoetst werden de volgende onderwerpen:
- statistiek/kansrekening (elementair)
- algebra/analyse grafieken, differentiëren, vergelijkingen :
    - gebroken functies
    - wortelfuncties
    - goniometrische functies
    - logaritmische functies
- vectorrekening
    - twee dimensies (inproduct)
    - drie dimensies (uitproduct, afstands- en hoekberekeningen)
- stereometrie (gecombineerd met vectorrekening)

Op de kwaliteit van de examens HAVO uit die tijd heb ik weinig aan te merken. Een nostalgisch gevoel bekroop me toen ik ze weer eens maakte, bedenkend dat in die jaren een groot gedeelte van alle havisten doorstroomde naar 5 VWO. Veel 50plus wiskundeleraren zullen zo'n route gevolgd hebben.

VWO WISKUNDE I 1976 (leerling toen 18 jaar, leraar nu 56 jaar)
Vijf opgaven, 15 subvragen over de onderwerpen:
- Functieonderzoek
- Functiestelsels
- Integratietechnieken (o.a. partieel integreren)
- Differentiaalvergelijkingen
- Goniometrische functies
- Kansberekeningen

Geen meetkunde (die werd beperkt in wiskunde II getoetst). De moeilijkheidsgraad bij wiskunde I was heel hoog, vergeleken met de huidige examens. Ongeveer 40% van de leerlingen koos dit vak.
Gerard Koolstra verbeterde de uitwerking van met name vraag 1 en 4b, waarvoor ik hem dank zeg.

VWO WISKUNDE B 1996 (leerling toen 18 jaar, leraar nu 36 jaar)

Min of meer dezelfde onderwerpen als bij de wiskunde I, op een duidelijk lager niveau, de kansrekening is naar wiskunde A en wiskunde B1 geschoven en de stereometrie is weer terug. Zeer uitzonderlijk vind ik vraag 10, waar een raaklijn aan een cilinder moet worden geconstrueerd in de stijl van de Beschrijvende Meetkunde, veertig jaar daarvoor. Heel moeilijk. Die vraag zal maar door weinig leerlingen goed gemaakt zijn.

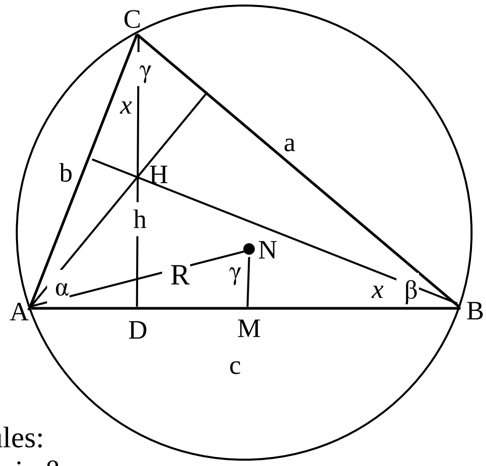
VWO WISKUNDE B1,2 2000 (leerling toen 18 jaar, leraar nu 32 jaar)

Deze recente examens heb ik niet meer bekeken, de uitwerkingen daarvan zijn overal op het web te vinden. Meetkunde van de kegelsneden en een explosie van rijk geïllustreerde contexten samen met het formuleblad. Bij wiskunde A zijn de contexten en de grafische rekenmachine nuttig voor de gamma studies, zegt men. Ik heb daarover een andere mening, zeker wat betreft de grafische rekenmachine. Voor wiskunde B heb ik het nut daarvan nooit begrepen. In ieder geval op examens is een overdaad aan rekenmachinegestuurde teksten sterk af te keuren. Men is wat dat betreft in dezelfde valkuil gestapt als bij de mislukte rekentoetsen 3F. Optimaliseringsmodellen en het oplossen van vergelijkingen in realistische situaties ('redactiesommen') zijn zeker een optie.

HBS B 1959 TRIGONOMETRIE

1. Van een scherphoekige driehoek ABC is gegeven dat $\alpha > \beta$. D is het voetpunt van de hoogtelijn op AB, M is het midden van AB en H het hoogtepunt. De straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC is R. (Er is geen tekening bij gegeven).

a. Bewijs: $HD = 2R\cos\alpha\cos\beta$ en $DM = R\sin(\alpha-\beta)$
b. Bereken α en β, als $\gamma = 60^o$ en $HD = 2\ DM$.



a. $x = \angle ACD = \angle HBA = 90^o - \alpha$; h = hoogtelijn AD.
N = middelpunt cirkel; $\angle ANM = \angle ACB = \gamma$
(middelpunthoek, omtrekshoek op zelfde boog).
$AD = b\cos\alpha$; $DB = a\cos\beta$; $AM = R\sin\gamma$.
Opp. driehoek = $\tfrac12 ab\sin\gamma = \tfrac12 h\cdot c = \tfrac12 h\cdot 2R\sin\gamma$ dus

$$\frac{ab}{h} = 2R \quad \text{en} \quad \tan x = \frac{AD}{h} = \frac{HD}{DB} = \frac{HD}{a\cos\beta} \quad \text{dus}$$

$$HD = \frac{a\cos\beta\cdot b\cos\alpha}{h} = \frac{ab}{h}\cos\alpha\cos\beta = 2R\cos\alpha\cos\beta\,.$$

Verder: $DM = AM - AD = R\sin\gamma - b\cos\alpha =$
$R\sin(\alpha+\beta) - b\cos\alpha$. Gebruik nu twee keer de somformules:
$R\sin(\alpha+\beta) - b\cos\alpha = R\sin\alpha\cos\beta + R\cos\alpha\sin\beta - 2R\sin\beta\cos\alpha$
$= R\sin\alpha\cos\beta - R\cos\alpha\sin\beta = R\sin(\alpha-\beta)$

b. $HD = 2\ DM$ met $\alpha+\beta = 120^o$. Links en rechts delen door 2R en er komt:
$\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$; links en rechts delen door $\cos\alpha\cos\beta$ geeft:

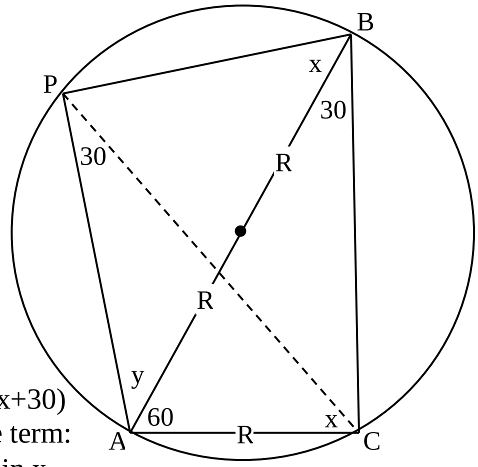
$1 = \tan\alpha - \tan\beta$ met $\tan\beta = \tan(120^o - \alpha) = \dfrac{\tan 120 - \tan\alpha}{1+\tan(120)\cdot\tan\alpha} = \dfrac{-\sqrt3 - \tan\alpha}{1-\sqrt3\cdot\tan\alpha}$ met $\tan\alpha = T$

komt er een vierkantsvergelijking in T: $1 = T + \dfrac{\sqrt3 + T}{1-\sqrt3\cdot T}$ geeft $1-\sqrt3\cdot T = T(1-\sqrt3\cdot T)+\sqrt3+T$

geeft $\sqrt3\cdot T^2 - (2+\sqrt3)\cdot T + 1 - \sqrt3 = 0$ met de oplossingen $T_{1,2} = \dfrac{2+\sqrt3\pm\sqrt{19}}{2\sqrt3}$ en $T_1 \approx 2{,}336$

$\tan\alpha \approx 2{,}336$ geeft $\alpha \approx 67^o$ (en $\beta \approx 53^o$). Dit uit een tabellenboekje afgelezen.

2. Van een driehoek ABC is gegeven dat $\alpha = 60^o$ en $\beta = 30^o$. P is een punt van de omgeschreven cirkel van ΔABC; de punten C en P liggen aan verschillende kanten van AB.
De straal van de cirkel is R; hoek ABP = x. (Er is geen tekening bij gegeven).
a. Druk PA, PB en PC uit in x en R.
b. P doorloopt de boog AB, waarop C niet ligt.
Voor welke waarde van x is de som PA + PB + PC maximaal?



a. In rechthoekige ΔAPB is $PA = 2R\sin x$ en $PB = 2R\cos x$.
Verschillende omtrekshoeken zijn gelijk en $y = 90^o - x$.
Vanwege $\sin 30^o = \tfrac12$ in ΔABC is $AC = 2R$.
Voor PC gebruiken we de sinusregel in ΔAPC:
$\dfrac{R}{\sin 30} = \dfrac{PC}{\sin(150-x)}$ dus $PC = 2R\sin(150-x) = 2R\sin(x+30)$.

b. Ga over op radialen en differentieer $2R\sin x + 2R\cos x + 2R\sin(x+30)$
$\cos x - \sin x + \cos(x+\pi/6) = 0$ met de somregel voor de laatste term:
$\cos x - \sin x + \tfrac12\sqrt3\cos x - \tfrac12\sin x = 0$ geeft $(2+\sqrt3)\cos x = 3\sin x$.
geeft $\tan x = (2+\sqrt3)/3$ met $x \approx 51^o$. (0,894 rad)

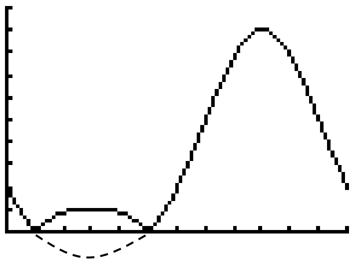
3. **a.** Bereken de extreme waarden van $-\cos 2x - 5\sin x + 3$
b. Teken de grafiek van de functie $|-\cos 2x - 5\sin x + 3|$ voor $0 \le x \le 360^o$.

a. Overgaan op radialen. $f'(x) = 2\sin 2x - 5\cos 2x = 4\sin x\cos x - 5\cos x = 0$
$\cos x = 0$ (of $\sin x = 5/4$, geen opl.) geeft $x = \frac{1}{2}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$.

$f \rightarrow$	2	-1		9	2
$f' \rightarrow$	$---$	0	$+ + + + + +$	0	$----$
x $\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}\pi$		$1\frac{1}{2}\pi$	2π

De extremen zijn: max. 9 en min. -1

b. Spiegelen van het onder de x-as liggende deel.



HBS B 1959 ALGEBRA

1. De oneindige reeks t_1, t_2, t_3, enz. met algemene term $t_n = \frac{1}{p^n}$ is convergent, d.w.z. deze oneindige reeks heeft een som s. Er wordt een nieuwe reeks gevormd: T_1, T_2, enz. met $T_1 = t_1 - t_2$, $T_2 = t_3 - t_4$, $T_3 = t_5 - t_6$ enz.
a. Schrijf T_n als functie van p en n.
b. Bewijs dat de oneindige reeks T_n convergent is en druk de som S van deze reeks uit in p.
c. Schets de grafiek van s als functie van p voor de waarden van p waarvoor de reeks een som heeft.

a. Meetkundige reeks met $a = t_1 = \frac{1}{p}$ en reden $r = \frac{1}{p}$ en $s = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p-1}$

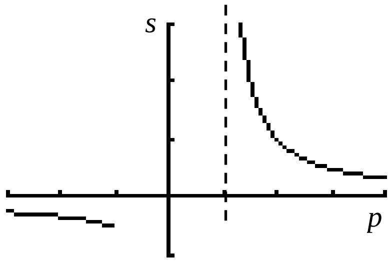
en voorwaarde $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$ dus $|p| > 1$.

Nieuwe reeks $T_n = t_{2n-1} - t_{2n} = (\frac{1}{p})^{2n-1} - (\frac{1}{p})^{2n} = (p-1)\cdot(\frac{1}{p})^{2n}$ met eerste term $T_1 = (p-1)\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{p-1}{p^2}$

en reden $\frac{(p-1)\cdot(\frac{1}{p})^{2n}}{(p-1)\cdot(\frac{1}{p})^{2n-1}} = \frac{1}{p}$ onder de voorwaarde $|p| > 1$.

b. Nieuwe som $S = \frac{\frac{p-1}{p^2}}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p-1}{p^2-p} = \frac{1}{p}$ met $|p| > 1$ dus convergent.

c. De grafiek van $s = \frac{1}{p-1}$ met $|p| > 1$ staat hiernaast.
(met de GR weliswaar).



2. Gegeven: $f(x) = {}^{3}\log(x+4) - {}^{\frac{1}{3}}\log(5-x)$

a. Voor welke waarden van x bestaat $f(x)$?

b. Los op: $f(x) = {}^{3}\log 8$.

c. Voor welke waarde van a heeft de vergelijking $f(x) = {}^{3}\log a$ twee gelijke wortels?

(N.B.: bedoeld wordt: twee gelijke oplossingen)

a. $f(x)$ bestaat voor $x > -4$ en voor $x < 5$ dus voor: $-4 < x < 5$.

b. $f(x) = {}^{3}\log(x+4) - {}^{3}\log\dfrac{1}{5-x} = {}^{3}\log(x+4)(5-x) = {}^{3}\log 8$ geeft $x^2 - x - 12 = 0$

dus $(x+3)(x-4) = 0$ geeft $x = -3$ of $x = 4$. (Beide oplossingen voldoen).

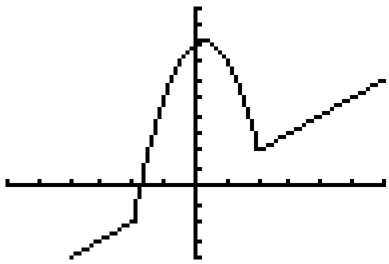
c. De vergelijking ${}^{3}\log(x+4)(5-x) = {}^{3}\log a$ dus $x^2 - x + a - 20 = 0$ heeft twee gelijke oplossingen als de discriminant $1 + 4(a-20) = 0$ dus als $a = \dfrac{79}{4}$.

3. **a.** Voor welke waarden van x geldt: $|4 - x^2| = x^2 - 4$?

b. Teken voor $-6 \le x \le +6$ de grafiek van de functie: $|4 - x^2| + 4 + x - x^2$

a. In het algemeen: de vergelijking $|A| = A$ heeft als oplossing: $A \ge 0$.
Dus heeft de gegeven vergelijking $|4 - x^2| = x^2 - 4$ als oplossing $x^2 - 4 \ge 0$.
Dit geeft als oplossing alle $x \ge 2$ en alle $x \le -2$.

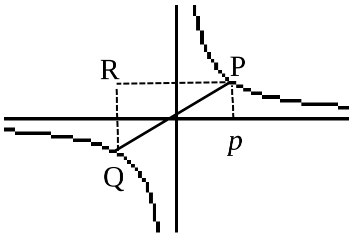
b. Voor $x \ge 2$ en voor $x \le -2$ staat hier de functie:
$f(x) = x^2 - 4 + 4 + x - x^2 = x$.
Voor $-2 \le x \le 2$ staat er:
$g(x) = 4 - x^2 + 4 + x - x^2 = -2x^2 + x + 8$
Het middenstuk is dus een parabool
met top $(\frac{1}{4}, \frac{65}{8})$ en snijpunt x-as $(\frac{-1+\sqrt{65}}{-4})$.
Snijpunt y-as $(0, 8)$.



HBS B 1971 GONIOMETRIE en ANALYTISCHE MEETKUNDE

1. Gegeven is de hyperbool met vergelijking $xy = 4$.
a. Op de hyperbool ligt een punt P. De lijn OP snijdt de hyperbool behalve in P nog in een punt Q. De lijn door P evenwijdig aan de x-as en de lijn door Q evenwijdig aan de y-as snijden elkaar R. Punt P doorloopt de hyperbool. Stel de vergelijking op van de verzameling van de zwaartepunten van de driehoeken PQR.
b. Bereken de coördinaten van het punt A waarvoor geldt dat de poollijn van A ten opzichte van de hyperbool samenvalt met de poollijn van A ten opzichte van de parabool met vergelijking $y^2 = 2x$.

a. Stel $x_P = p$. De coördinaten zijn: $P(p,\frac{4}{p})$ $Q(-p,-\frac{4}{p})$ $P(-p,\frac{4}{p})$



Het zwaartepunt Z is het gemiddelde hiervan dus: $Z(-\frac{1}{3}p,\frac{4}{3p})$

Voor de coördinaten (x, y) van Z geldt dus $x=-\frac{1}{3}p$ en $y=\frac{4}{3p}$

Na eliminatie van p staat hier de vergelijking $y=\frac{4}{-9x}$ oftewel $xy=-\frac{4}{9}$.

b. De poollijn van het punt (x_A, y_A) t.o.v. de hyperbool $xy = 4$ is $xy_A + yx_A = 8$ . . . (1)
De poollijn van het punt (x_A, y_A) t.o.v. de parabool $y^2 = 2x$ is $yy_A = x + x_A$
oftewel $x - yy_A = - x_A$
geschreven als: $xy_A - yy_A^2 = - x_Ay_A$ . . . (2)
Links en rechts de coëfficiënten in (1) en (2) vergelijken levert:
$x_A = - y_A^2$ en $x_Ay_A = - 8$; eliminatie hieruit van x_A levert: $y_A^3 = 8$ dus $y_A = 2$ en $x_A = - 4$.
Conclusie: het punt is $A(- 4, 2)$.

2. Een stelsel cirkels is gegeven door $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 4\lambda^2 y = 0$ met $\lambda \neq 0$.
a. Stel de vergelijking op van de verzameling van de middelpunten van de cirkels.
b. Elk exemplaar van het stelsel snijdt de x-as in O en in een punt A. Bij elk exemplaar van het stelsel behoort een lijn p die dat exemplaar in A raakt.
Bewijs dat de lijnen p door een vast punt gaan en bereken de coördinaten van dat punt.
c. Door de waarden λ_1 en λ_2 van λ worden twee cirkels van het stelsel gegeven. Welke betrekking bestaat tussen λ_1 en λ_2 als deze cirkels elkaar loodrecht snijden?

a. Kwadraat splitsen: $(x - \lambda)^2 - \lambda^2 + (y - 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^4 = 0$ dus $(x - \lambda)^2 + (y - 2\lambda^2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda^4$
Middelpunten: $M (\lambda, 2\lambda^2)$ liggen op de parabool $y = 2x^2$ (behalve $O(0, 0)$).

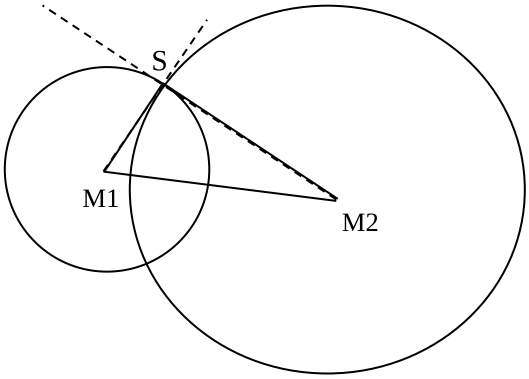
b. $y = 0$ geeft $x^2 - 2\lambda x = 0$ dus $A (2\lambda, 0)$. RiCo, doe d/dx: $2x+2y\frac{dy}{dx}-2\lambda-4\lambda^2\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}(2y-4\lambda^2)=2\lambda-2x$ dus $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda-x}{y-2\lambda^2}$ in punt $A(2\lambda, 0)$ dus $\frac{dy}{dx}=\frac{\lambda-2\lambda}{0-2\lambda^2}=\frac{1}{2\lambda}$ $(\lambda\neq 0)$

Raaklijnen: $y=\frac{1}{2\lambda}x-1$ gaan alle door $(0, - 1)$.

c. Loodrecht snijdende raaklijnen gaan door de middelpunten, M_1 $(\lambda_1, 2\lambda_1^2)$ en M_2 $(\lambda_2, 2\lambda_2^2)$ en de stelling van Pythagoras levert $(2\lambda_2^2-2\lambda_1^2)^2+(\lambda_2-\lambda_1)^2=\lambda_1^2+4\lambda_1^4+\lambda_2^2+4\lambda_2^4$
Uitwerken tot $2\lambda_1\lambda_2+8(\lambda_1\lambda_2)^2=0$

geeft twee antwoorden: $\lambda_1\lambda_2=0$ of $\lambda_1\lambda_2=-\frac{1}{4}$.



3. Voor $0 \le x \le 2\pi$ is gegeven: $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$ en de functie $g(x)$ met:
$g'(x) = -f(x)$ en $g(0) = -f(0)$

a. Bewijs dat de grafieken van f en g elkaar raken in een punt met $x = \pi$.
b. In welk interval zijn de functies f en g beide stijgend?

a. $g'(x) = -2\cos x - \sin 2x$; $g(x) = -2\sin x + ½\cos 2x + C$ en $g(0) = ½ + C = -2$ dus $C = -2½$
$f'(\pi) = g'(\pi)$ geeft: $-2\sin\pi + 2\cos 2\pi = -2\cos\pi - \sin 2\pi$ geeft $0 + 2 = +2 - 0$ en dat klopt.
$f(\pi) = g(\pi)$ geeft: $2\cos\pi + \sin 2\pi = -2\sin\pi + ½\cos 2\pi - 2½$ geeft $-2 + 0 = 0 + ½ - 2½$
en dat klopt ook.

b. $f'(x) > 0 \rightarrow -2\sin x + 2\cos 2x > 0 \rightarrow -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) > 0 \rightarrow (\sin x - ½)(\sin x + 1) < 0$
Omdat $(\sin x + 1) > 0$ voor alle x, staat hier: $\sin x < ½$ met opl. $[0, \frac{1}{6}\pi) \cup (\frac{5}{6}\pi, 2\pi]$ . . . (1)
$g'(x) > 0 \rightarrow -2\cos x - \sin 2x > 0 \rightarrow -2\cos x - 2\sin x\cos x > 0 \rightarrow \cos x(1 + \sin x) < 0$
Omdat $(1 + \sin x) > 0$ voor alle x, staat hier: $\cos x < 0$ met opl. $< \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi >$ . . . (2)
De doorsnede van (1) en (2) is het interval: $< \frac{5}{6}\pi, 1\frac{1}{2}\pi >$

HAVO 1976 – '77

1. Voor elk reëel getal a is gegeven de functie $f_a(x) = \dfrac{3x+3a}{x^2+ax+a}$

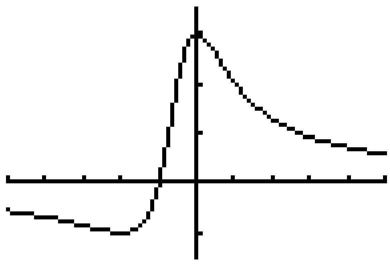
a. Onderzoek de functie f_1 en teken de grafiek van deze functie.
b. Voor welke a heeft de grafiek van f_a geen verticale asymptoot?
c. Los op: $f_4(x) > f_0(x)$

a. $f_1(x) = \dfrac{3x+3}{x^2+x+1}$ Nulpunt: $x = -1$; H.A. $y = 0$; Geen V.A. want $D = -3 < 0$

Extremen: $f_1'(x) = \dfrac{3(x^2+x+1)-(2x+1)(3x+3)}{(x^2+x+1)^2} = 0$

geeft: $-3x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ of $x = -2$

Tekenschema $f' \rightarrow$ – – – – 0 + + + + 0 – – – –
$x \rightarrow$ -2 0
MIN. MAX.
MIN. $f(-2) = -1$; MAX. $f(0) = 3$



b. De vergelijking $x^2 + ax + a = 0$ heeft geen oplossing als $D < 0$ dus $a^2 - 4a < 0$ dus $0 < a < 4$.

c. Opgelost moet worden:

$$\frac{3x+12}{x^2+4x+4} > \frac{3x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^2+4x+4} - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+4)-(x^2+4x+4)}{x(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-4}{x(x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x(x+2)^2} < 0$$

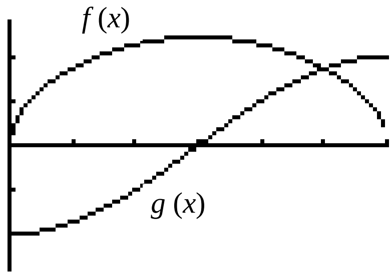
Voor het linkerlid een tekenschema: – – – – – ** – – – * + + + + + +
$x \rightarrow$ -2 0

De oplossing is dus: $x < 0$ (maar $x \neq -2$)

---

2. Voor $0 \le x \le \pi$ zijn gegeven de functies: $f(x) = \sqrt{(6\sin x)}$ en $g(x) = -2\cos x$

a. Los op: $f(x) = g(x)$
b. Teken in één figuur de grafieken van f en g.
c. Onderzoek of de grafieken elkaar loodrecht snijden.



a. Kwadrateren geeft $6\sin x = 4\cos^2 x = 4(1 - \sin^2 x)$ dus
$4\sin^2 x + 6\sin x - 4 = 0$ $\;2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ geeft
$\sin x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$ geeft $\sin x = \dfrac{1}{2}$ dus $x = \dfrac{5}{6}\pi$ $\left(x = \dfrac{1}{6}\pi \text{ vervalt}\right)$

b. Snijpunt: $\left(\dfrac{5}{6}\pi, \sqrt{3}\right)$

c. $f'(x) = \dfrac{6\cos x}{2\sqrt{6\sin x}} = \dfrac{3\cos x}{\sqrt{6\sin x}} \rightarrow f'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = \dfrac{-1\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} \left(= -\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$g'(x) = 2\sin x \rightarrow g'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$ Het product van de r.c. is $-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$ is $\neq -1$ dus NIET loodrecht.

---

3. Gegeven de parabool p: $y^2 - 4y + 4 - 2x = 0$ en de lijn k: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a. De lijn k snijdt p in de punten A en B. Bereken de lengte van lijnstuk AB.
b. De lijn m is evenwijdig aan k en raakt p. Stel een vergelijking van m op.
c. De cirkel c met middelpunt op de y-as raakt p in het punt (2, 0). Stel een vergelijking van c op.

a. p: $(y-2)^2 = 2x$ heeft (0, 2) als top en de lijn $y = 2$ als symmetrieas.
De snijpunten van k en p volgen uit: $(-2\lambda - 2)^2 = 2(4 + \lambda)$ dus $2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$
Uit de abc-formule volgt: $\lambda = -2$ of $\lambda = ½$ met de snijpunten A(2, 4) en B(4½, – 1).
De lengte AB = $\sqrt{(2\frac{1}{2})^2 + 5^2} = \sqrt{31\frac{1}{4}}$

b. De vergelijking van lijn m is: $y = -2x + b$. Dit invullen in p: $(y-2)^2 = 2x$ geeft:
$(-2x + b - 2)^2 = 2x$ geeft $4x^2 + 4 + b^2 + 8x - 4bx - 4b = 2x$ dus $4x^2 + (6 - 4b)x + (b-2)^2 = 0$.
Er is sprake van raken als $D = 0$ dus: $(6-4b)^2 - 16(b-2)^2 = 0$ met de oplossing: $b = 1\frac{3}{4}$.
Opmerking: het gaat iets sneller met de substitutie $2x = b - y = (y-2)^2$ en $y^2 - 4y + 4 + y - b = 0$
Hierin is $D = 9 - 4\cdot(4 - b) = 0$ enzovoorts.

c. Merk op, dat (2, 0) inderdaad een punt van de parabool is, want: $(0-2)^2 = 4$.
De raaklijnvergelijking (*) in het raakpunt (x_1, y_1) is: $(y-2)(y_1-2) = x + x_1$ met $x_1 = 2$ en $y_1 = 0$.
Dus is de raaklijnvergelijking: $x + 2y - 2 = 0$ oftewel: $y = -½x + 1$
De normaal (loodlijn) in (2, 0) heeft als vergelijking: $y = 2x - 4$; deze snijdt de y-as in M(0, – 4).
De vergelijking van cirkel c is dus: $x^2 + (y+4)^2 = 20$ [$r^2 = 2^2 + (-4)^2 = 4 + 16 = 20$]

(*) Kan ook opgelost worden via $f(x) = 2 - \sqrt{2x}$ en $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}$

---

4. Gegeven de functies: $f(x) = {}^2\log(4 - x^2)$ en $g(x) = {}^2\log(2 + x)$
a. Bereken het domein van f en bereken het domein van g.
b. Los op: $f(x) \cdot g(x) = 0$
c. Los op: $f(x) + g(x) = 3$

a. Df: $4 - x^2 > 0$ geeft $-2 < x < 2$ Dg: $2 + x > 0$ geeft $x > -2$

b. $f(x) = 0$: $4 - x^2 = 2^0 = 1$ geeft $x = \sqrt{3}$ of $x = -\sqrt{3}$
of $g(x) = 0$ geeft $2 + x = 1$ dus $x = -1$

c. ${}^2\log(4 - x^2) + {}^2\log(2 + x) = 3$ geeft ${}^2\log[(4 - x^2)\cdot(2 + x)] = 3$ dus $(4 - x^2)\cdot(2 + x) = 2^3 = 8$
$8 + 4x - 2x^2 - x^3 = 8$ dus $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$ geeft $x(x^2 + 2x - 4) = 0$
Opl. $x = 0$ of $x = -1 + \sqrt{5}$ of $x = -1 - \sqrt{5}$ (maar de laatste vervalt).

---

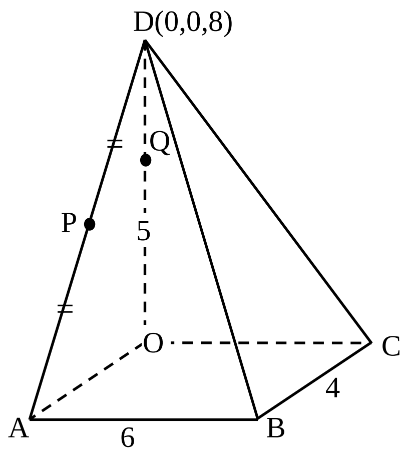
5. Aan een diner nemen 5 echtparen deel. Er zijn 10 briefjes gemaakt waarvan iedere persoon er één pakt. Op 2 van die briefjes staat een kruis. Wie een briefje met een kruis pakt, moet afwassen.
Bereken de kans dat

a. twee dames moeten afwassen Antw. $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

b. een heer en een dame moeten afwassen Antw. $\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot 2 = \frac{5}{9}$

c. een echtpaar moet afwassen Antw. $1 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ (dus *niet* $\frac{1}{5}$)

6. In R3 is gegeven de piramide D.OABC met O(0,0,0) A(4,0,0) B(4,6,0) C(0,6,0) en D(0,0,8).
P is het midden van de ribbe AD.
Verder is gegeven het punt Q(0,0,5).



a. Bereken de afstand van P en vlak BCD.
b. Vlak V gaat door P en Q en is evenwijdig met CD.
V snijdt de ribbe AB in E. Bereken de coördinaten van E.
c. Op de ribbe AB ligt een punt F.
De cosinus van de hoek van lijn OF en lijn CD is 0,2.
Bereken de coördinaten van F.

a. Vectorvoorst. BCD: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}_{BCD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vergelijking vlak BCD: $4y + 3z = 24$. Afstand (P, BCD) = $\left| \frac{4y+3z}{5} \right|_{P(2,0,4)} = \frac{12}{5}$

b. P(2,0,4) en Q(0,0,5) geeft v.v. vlak V: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ met $\vec{n}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

Vergelijking V: $3x + 8y + 6z = 30$ [Uitproduct!]

Snijden met AB: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $3 \cdot 4 + 8 \cdot p = 30$ dus $p = \frac{9}{4}$ en $E(4, \frac{9}{4}, 0)$

c. F(4, p, 0) Hoekformule: $\cos\varphi = 0{,}2 = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{5 \cdot \sqrt{p^2+16}} = \dfrac{3p}{5 \cdot \sqrt{p^2+16}}$ [Inproduct!]

$9p^2 = p^2 + 16$ geeft $p = \sqrt{2}$ dus F(4, $\sqrt{2}$, 0)

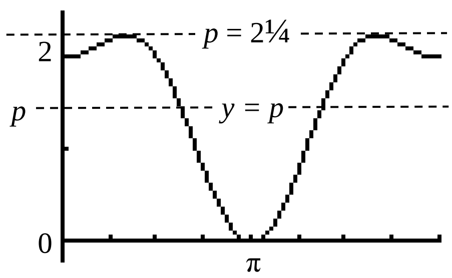
---

7. Op het domein $[0, 2\pi]$ is gegeven de functie: $f(x) = (2 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)$

a. Los op: $f(x) = 2$
b. Onderzoek f en teken de grafiek.
c. Voor welke p heeft de vergelijking precies twee oplossingen op dit domein?

a. $(2 - \cos x)(1 + \cos x) = 2 - \cos^2 x + \cos x = 2$ geeft $\cos^2 x - \cos x = 0$ geeft $\cos x(1 - \cos x) = 0$
Oplossingen: $x = 0$, $x = ½\pi$, $x = 1½\pi$, $x = 2\pi$.

b. Nulpunt $\cos x = -1$ geeft $(\pi, 0)$
$f'(x) = (1 + \cos x) \cdot \sin x + (2 - \cos x) \cdot -\sin x = 0$
geeft $\sin x(2\cos x - 1) = 0$ dus oplossingen:
$x = 0$, $x = \pi/3$, $x = \pi$, $x = 5\pi/3$, $x = 2\pi$.



Tekenschema:
f' → 0 + + + + 0 – – – – – – 0 + + + + + + 0 – – – – 0

x → 0 π/3 π 5π/3 2π

MIN 2 MAX 2¼ MIN 0 MAX 2¼ MIN 2

c. Zie de grafiek, er zijn twee gemeenschappelijke punten als $p = 2¼$ en als $0 < p < 2$.

VWO wiskunde I, 1976 (verbeteringen en commentaar van Gerard Koolstra)

1. Gegeven is van [-1, 8] naar ℝ de functie $f : x \to -2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

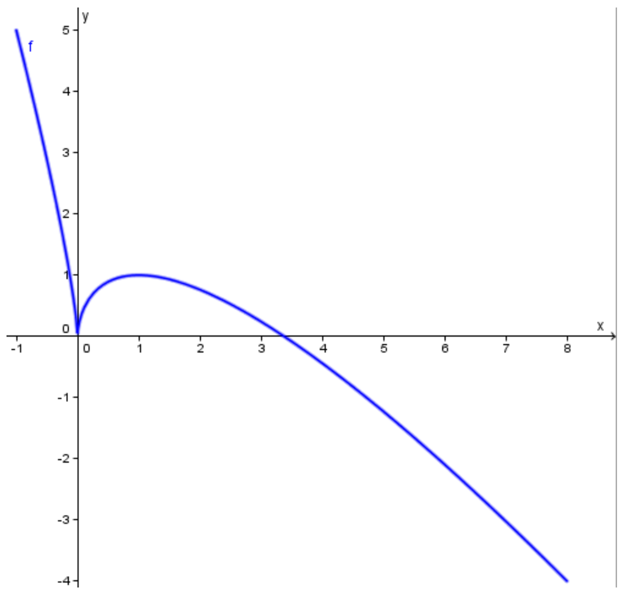
a. Bewijs dat deze functie in $x = 0$ niet differentieerbaar is.
b. Onderzoek de functie f en teken de grafiek van f .
c. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as.

a. In die tijd werd er veel aandacht besteed aan continuïteit, differentieerbaarheid e.d.
Voor $x \neq 0$ geldt dat $f'(x) = -2 + 3 \times \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = -2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$
Om de differentieerbaarheid in x=0 te onderzoeken is echter de definitie nodig.
Bestaat $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$?
$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2h+3\sqrt[3]{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}(\frac{-2h}{h} + \frac{3\sqrt[3]{h^2}}{h}) = \lim_{h\to 0}(-2 + \frac{3}{\sqrt[3]{h}})$
Deze limiet bestaat niet, dus de functie is niet differentieerbaar in 0.

b. Een zeer bekende vraag in die tijd. "Onderzoek" impliceerde in ieder geval:
1) tekenschema $f(x)$ [incl. domein]
2) tekenschema $f'(x)$
3) extremen (incl. randextremen)
4) (verticale en horizontale) asymptoten

1) Het domein is hier [-1, 8].
$f(x)$=0 ; $-2x + 3\sqrt[3]{x^2} = 0$; $3\sqrt[3]{x^2} = 2x$; $27x^2 = 8x^3$; $x^2 = 0 \; of \; 8x = 27$
$x = 0 \; of \; x = \frac{27}{8}$
Enkele functiewaarden:
$f(-1) = 2 + 3 = 5$
$f(1) = -2 + 3 = 1$
$f(8) = -16 + 3\times4 = -4$

$f(x)$ ******|+ + 0 + + + + 0− − −|***
-1 0 $^{27}/_{8}$ 8



2) $f'(x) = -2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = -2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ (voor $x \neq 0$)
$f'(x)$= 0 ; $-2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0$; $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 2$; $\sqrt[3]{x} = 1$; x=1

$f'(x)$ ******|− − * + + 0 − − − −|***
-1 0 1 8

3) Randmaximum: $f(-1)$= 5
Lokaal minimum: $f(0)$= 0
Lokaal maximum: $f(1)$= 1
Randminimum: $f(8)$= -4
In (0,0) heeft de grafiek een verticale raaklijn
4) Er zijn geen asymptoten
Tekening: zie hiernaast. Het bereik is [-4, 5]

c. Opp. = $\int_0^{\frac{27}{8}} \left(-2x + 3x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \left[-x^2 + \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}}\right]_0^{\frac{27}{8}} = -\frac{729}{64} + \frac{9}{5} \times \frac{243}{32} - 0 = -\frac{729}{64} + \frac{3\times729}{160} =$

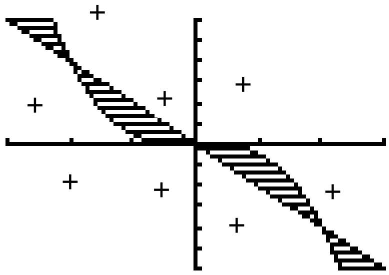
$= -\frac{5\times729}{320} + \frac{6\times729}{320} = \frac{729}{320}$

opmerking:
Het berekenen (zonder rekenmachine) van $(\frac{27}{8})^{\frac{5}{3}}$ vraagt een verstandige aanpak, bijvoorbeeld:
$(\frac{27}{8})^{\frac{5}{3}} = \left((\frac{27}{8})^{\frac{1}{3}}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5$ of $(\frac{3^3}{2^3})^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$

2. Gegeven is de differentiaalvergelijking $(2x + y)$ d $= (2x^3 + 4y)\,\mathrm{d}x$

a. Teken de verzameling van de punten waarin het lijnelement dat aan de differentiaalvergelijking voldoet, een negatieve richtingscoëfficiënt heeft.
b. Welke tweedegraadsfunctie voldoet aan de differentiaalvergelijking?
c. De lijn l raakt een integraalkromme van de differentiaalvergelijking in het punt P(1, 1). Bewijs dat P het enige punt van l is waarin l een integraalkromme raakt.

a. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^3 + 4y}{2x + y}$



De verticale lijnelementen liggen op $y = -2x$
De horizontale lijnelementen liggen op $y = -\frac{1}{2}x^3$
Singuliere punten (0, 0) (2, –4) (–2, 4)
Positieve helling + 1 in bijv. (±1, 0) en + 4 in (0,±1).
Negatieve helling: zie de gearceerde gebieden.

b. $y = ax^2 + bx + c$ met $\mathrm{d}y = (2ax + b)\cdot\mathrm{d}x$ substitueren in de d.v. geeft:
$(2x + ax^2 + bx + c)\,(2ax + b)\cdot\mathrm{d}x = (2x^3 + 4(ax^2 + bx + c))\cdot\mathrm{d}x$
Links en rechts de coëfficiënten vergelijken:
$2a^2x^3 + (4a + 3ab)x^2 + (2b+b^2 + 2ac)x + bc \equiv 2x^3 + 4ax^2 + 4bx + 4c$
$2a^2 = 2 \qquad 4a + 3ab = 4a \qquad 2b+b^2 + 2ac = 4b \qquad bc = 4c$
Dit levert de oplossingen $a = 1$ of $a = -1$ en $b = c = 0$
De oplossingskrommen zijn dus $y = x^2$ en $y = -x^2$ (behalve (0,0)).

c. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(1,1)} = \dfrac{6}{3} = 2$ De lijn door (1, 1) met r.c. 2 heeft vergelijking: $y = 2x - 1$

Dit substitueren in de d.v. geeft: $\dfrac{2x^3 + 4(2x-1)}{2x + (2x-1)} = 2 \iff 2x^3 + 8x - 4 = 8x - 2 \iff x = 1$

Invullen in geeft y = 2 – 1 = 1; hieruit volgt dat (1, 1) het enige raakpunt op l is.

3. Gegeven is het stelsel functies $f_p(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-px^3}$

a. Bewijs dat er een punt is waarin de grafieken van alle functies f_p elkaar raken.
b. G is het vlakdeel ingesloten door de x-as, de grafiek van f_1 en de lijn $x = 1$. Bereken de inhoud van het lichaam dat ontstaat bij wenteling van G om de x-as.
c. Voor welke p heeft f_p een maximum? Gevraagd de verzameling van de punten (x_p, y_p), waarbij y_p zo'n maximum is met bijbehorende x_p.

a. $f_p(0) = 0$ voor alle p. Dus gaan alle grafieken door (0, 0). We bepalen $f\,'(0)$:
$f_p\,'(x) = 1\cdot\mathrm{e}^{-px^3} - x\cdot 3px^2\cdot\mathrm{e}^{-px^3} = \mathrm{e}^{-px^3}\cdot(1 - 3px^3) = 0$ geeft $f_p\,'(0) = 1$ (onafhankelijk van p).
De lijn $y = x$ is een gemeenschappelijke raaklijn en het gemeenschappelijke raakpunt is (0, 0).

b. $f_1(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x^3}$ Inhoud $= \pi\int_0^1 (f_1(x))^2\,dx = \pi\int_0^1 (x^2 \cdot e^{-2x^3})\,dx = \pi \cdot \left[-\dfrac{1}{6}\mathrm{e}^{-2x^3}\right]_0^1 = \dfrac{1}{6}\pi(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^2})$

(primitiveren via substitutie $x^3 = u$ en $\mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$)

c. Uit $f_p\,'(x) = 0$ volgt: $(1 - 3px^3) = 0$ dus $px^3 = \dfrac{1}{3}$ oftewel $x_p = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3p}}$

Na substitutie $px^3 = \frac{1}{3}$ in $f_p(x)$ volgt voor de verzameling toppen: $y_p = x \cdot e^{-\frac{1}{3}} = \frac{x}{e^{\frac{1}{3}}}$ (met $x > 0$)

Opmerking:

Voor $p > 0$ en rechts van een top, voor $x_p > \sqrt[3]{\frac{1}{3p}}$ is $(1 - 3px^3)$ negatief, f_p dus dalend.

Voor $p < 0$ en rechts van een top, voor $x_p > \sqrt[3]{\frac{1}{3p}}$ is $(1 - 3px^3)$ positief, f_p dus stijgend.

Voor de verzameling van de MAXIMA (toppen) geldt dus de beperking $x > 0$.
(Voor de dalen geldt: $x < 0$)

---

4. In een vaas bevinden zich k rode en n blauwe dobbelstenen.

a. Trek aselect uit de vaas een dobbelsteen en werp hiermee.
De kans op de kleur rood en de worp 6 is gelijk aan 1/26. Leg de getrokken dobbelsteen niet terug in de vaas. Trek aselect uit de vaas een tweede dobbelsteen en werp hiermee. Onder voorwaarde dat de eerste dobbelsteen rood was, is de kans op de kleur blauw en de worp 6 gelijk aan 2/15.
Hoeveel dobbelstenen bevonden zich aanvankelijk in de vaas?

b. Neem aan dat $n = k + 4$. Trek aselect zonder teruglegging twee dobbelstenen uit de vaas.
De kans dat één van de dobbelstenen rood en de andere blauw is, is groter dan ½.
Leg de twee getrokken dobbelstenen terug in de vaas. Trek aselect weer twee dobbelstenen uit de vaas, maar nu met teruglegging. Bereken het minimum van de kans dat één van de dobbelstenen rood en de andere blauw is.

a. k rood, n blauw. P(rood en 6) = $\frac{1}{6} \cdot \frac{k}{k+n} = \frac{1}{26}$ geeft $13k = 3k + 3n$ dus $10k = 3n$ . . . (1)

Daarna: P(blauw en 6) = $\frac{n}{n+k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ geeft $5n = 4n + 4k - 4$ dus $4k = n + 4$3 . . . (2)

Uit (1) en (2) volgt: $k = 6$ en $n = 20$; er lagen 26 dobbelstenen in de vaas.

b. k rood en $k + 4$ blauw. Zonder terugleg: P(R,B) + P(B,R) = $\frac{2k(k+4)}{(2k+4)(2k+3)} > \frac{1}{2}$

Dus: $4k^2 + 8k > 4k^2 + 14k + 12$ geeft $k > 6$.

Daarna met terugleg: P(R,B) + P(B,R) = $\frac{2k(k+4)}{(2k+4)^2}$ onder de voorwaarde $k > 6$.

De kans $P(k) = \frac{2k(k+4)}{4\,(k+2)^2} = \frac{k(k+4)}{2\,(k+2)^2} = \frac{1}{2}\frac{k^2+4k}{k^2+4k+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2+4k+4}{k^2+4k+4} - \frac{4}{k^2+4k+4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4}{(k+2)^2}\right)$

is een stijgende functie voor $k>6$.
De minimumkans doet zich dus voor bij de kleinst mogelijke waarde van k : $k=7$ (k is geheel):
$P(7) = \frac{14 \times 11}{18^2} = \frac{154}{324} = \frac{77}{162}$ is het minimum van de kans.

---

5. Voor elke p is op <0, π> gegeven de functie $f_p(x) = \frac{p + \sin x}{\sin 2x}$

a. Los op: $f_1(x) - f_2(x) > 1$
b. Bereken het bereik van de functie $g(x) = f_1(x) : f_2(x)$
c. Voor welke p geldt dat de vergelijking $f_p(x) = \tan x$ geen oplossingen heeft op <0, π>?

a. $\dfrac{1+\sin x}{\sin 2x}-\dfrac{2+\sin x}{\sin 2x}>1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1+\sin x-2-\sin x}{\sin 2x}>1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-1}{\sin 2x}>1 \qquad \ldots \text{ (*)}$

Voor $0 < x < ½\pi$ is $\sin 2x > 0$ en gaat (*) over in: $\sin 2x < -1$ en dat levert geen oplossingen.
Voor $½\pi < x < \pi$ is $\sin 2x < 0$ en gaat (*) over in: $\sin 2x > -1$ met de oplossing: $½\pi < x < \pi$

b. $f_1(x) : f_2(x) = g(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\sin x}$ met $g'(x)=\dfrac{\cos x(2+\sin x)-\cos x(1+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\dfrac{\cos x}{(2+\sin x)^2}=0$

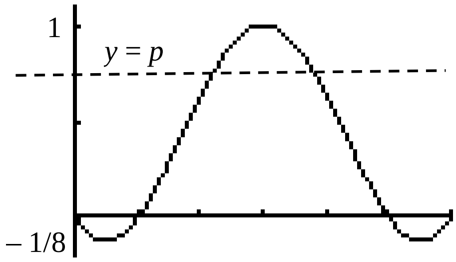
Dit geeft een maximum 2/3 voor $x = ½\pi$ en twee randminima ½ ; tekenschema's:

$g \rightarrow$ ½ 2/3 ½

$g' \rightarrow$ + + + + 0 – – – – Dus het bereik van $g(x)$ is $[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$

$x \rightarrow$ 0 $½\pi$ π

c. Uit $\dfrac{p+\sin x}{\sin 2x}=\tan x$ volgt $\dfrac{p+\sin x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}$; omdat $\cos x \neq 0$ (staat in de noemer) mag je hier links en rechts met $\cos x$ vermenigvuldigen, zodat er komt:
$2\sin^2 x - \sin x = p$
Via een schets van de grafieken
$h(x) = 2\sin^2 x - \sin x$ en $y = p$ kunnen we onderzoeken, wanneer er geen oplossingen zijn.



$h'(x) = 4\sin x\cos x - \cos x = \cos x(4\sin x - 1) = 0$
MAX. 1 als $\cos x = 0$ dus als $x = ½\pi$
MIN. $-1/8$ als $\sin x = 1/4$ geeft $h(1/4) = 2/16 - 1/4 = -1/8$.

Het antwoord op de vraag is dus: voor $p > 1$ en voor $p < -1/8$ zijn er geen oplossingen.

VWO Wiskunde B 1993 - I

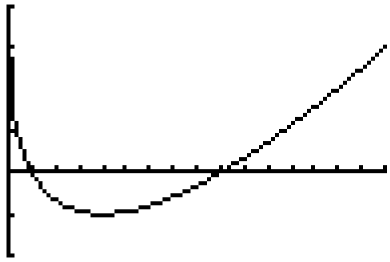
Opgave 1

Gegeven is de functie $f(x) = x + 3 - 4\sqrt{x}$ met $x \geq 0$. *K* is de grafiek van *f*.

1. Onderzoek *f* en teken *K*.

2. Bereken de oppervlakte van de driehoek gevormd door de *x*-as en de raaklijnen aan *K* in de punten waar *K* de *x*-as snijdt.

3. *V* is het vlakdeel begrensd door *K* en de lijn $y = 3$. Bereken in gehelen nauwkeurig de inhoud van Het lichaam dat ontstaat door *V* te wentelen om de lijn $y = 3$.



1. Nulpunten: $x + 3 - 4\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = x + 3 \Rightarrow 16x = x^2 + 6x + 9$

$x^2 - 10x + 9 = (x-1)(x-9) = 0$ Snijpunten (1, 0) en (9, 0)

Extremen: $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ geeft MIN. $f(4) = -1$

Tekenschema:

$x \rightarrow$	0	4	9
$f'(x) \rightarrow$	* – – – –	0 + + + + +	
$f(x) \rightarrow$	3	– 1	0
	VERT	HOR MIN.	

2. Raaklijnen: $f'(1) = 1 - \dfrac{2}{1} = -1$ vergelijking raaklijn $y = -x + 1$

$f'(9) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ vergelijking raaklijn $y = \dfrac{1}{3}x - 3$

Snijpunt volgt uit $3y = 3 - 3x = x - 9$ dus $x = 3$; snijpunt $(3, -2)$; Opp. driehoek = $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$.

3. Grafiek snijden met $y = 3$ geeft $x - 4\sqrt{x} = 0$ geeft $x^2 = 16x$ snijpunten (0, 3) en (16, 3).
Schuif de grafiek 3 omlaag. Dat geeft $g(x) = x - 4\sqrt{x}$ wentelend om de *x*-as.

Inhoud is: $\pi \cdot \int_0^{16} (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^{16} (x^2 - 8x^{1\frac{1}{2}} + 16x)\,dx = \pi \cdot \left[\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{16}{5}x^{2\frac{1}{2}} + 8x^2\right]_0^{16} \approx 429$

Opgave 2

Gegeven is de kromme *K* met $x = \ln|t+1|$ en $y = \ln|t-1|$ met $t \neq 1$ en $t \neq -1$
Er zijn drie snijpunten van *K* met de coördinaatassen.

4. Bereken de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen in deze snijpunten.

K heeft een horizontale, een verticale en een scheve asymptoot.

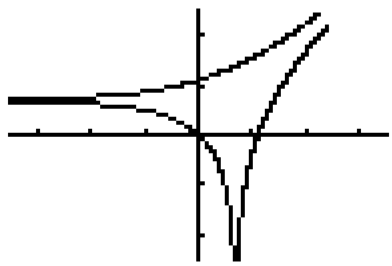
5. Stel een vergelijking op van elk van deze asymptoten.

6. Teken *K*.

7. Bewijs dat *K* symmetrisch is ten opzichte van de lijn $y = x$.

4. $x = 0$ geeft $|t+1| = 1$ geeft $t = 0$ of $t = -2$ geeft (0, 0) en (0, ln 3).
$y = 0$ geeft $|t-1| = 1$ geeft ook nog $t = 2$ dus (ln 3, 0)

Rico: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{\frac{1}{t-1}}{\frac{1}{t+1}} = \dfrac{t+1}{t-1}$ geeft rico – 1 in (0,0) rico 3 in (ln 3, 0) en rico 1/3 in (0, ln 3).



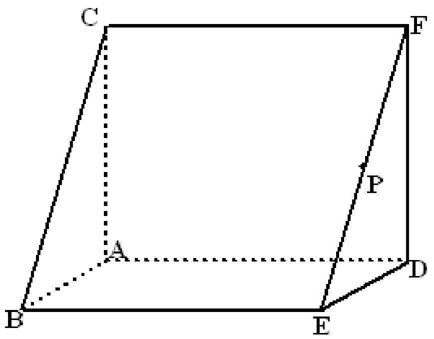
5. $t \rightarrow -1$ dan $x \rightarrow -\infty$ en $y \rightarrow \ln 2$ geeft H.A. $y = \ln 2$
$t \rightarrow +1$ dan $x \rightarrow \ln 2$ en $y \rightarrow -\infty$ geeft V.A. $x = \ln 2$
$t \rightarrow \pm\infty$ dan $y - x = \ln(t-1) - \ln(t+1) = \ln\dfrac{|t-1|}{|t+1|} \rightarrow \ln\dfrac{|t|}{|t|} = \ln 1$
gaat naar 0 dus S.A. $y = x$

7. Merk op, dat voor tegengestelde waarden van *t* de *x* en *y* verwisseld worden:
Vervang *t* door $-t$ en er staat: $x = \ln|-t+1| = \ln|1-t| = \ln|t-1|$ (is de oude *y*) en
$y = \ln|-t-1| = \ln|t+1|$ (is de oude *x*)
Waarmee de symmetrie t.o.v. de lijn $y = x$ aangetoond is.

Opmerking: de grafiek bestaat uit twee stukken:
voor $t \geq -1$: $y = \ln|-2 + e^x|$ en voor $t < -1$: $y = \ln|2 + e^x|$

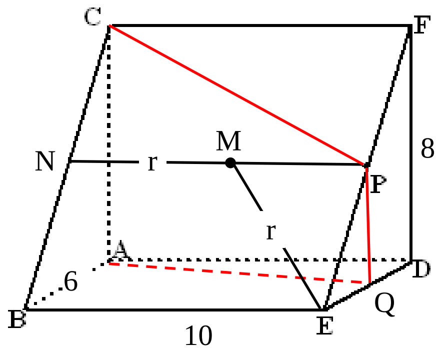
Opgave 3

Van het rechte prisma ABC.DEF dat hiernaast getekend is is gegeven: $\angle BAC = 90^\circ$, AB = 6, AC = 8 en AD = 10. P is het midden van EF. Vlak ACP verdeelt het prisma in twee delen.



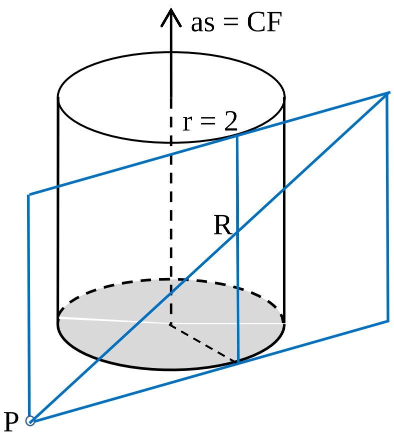
8. Bereken de verhouding van de inhouden van die twee delen.
9. Een bol raakt vlak ABC en gaat door D, E en F.
Bereken de straal van deze bol.
10. Teken in de figuur de lijn door P die lijnstuk AC snijdt en lijn CF kruist op een afstand van 2.

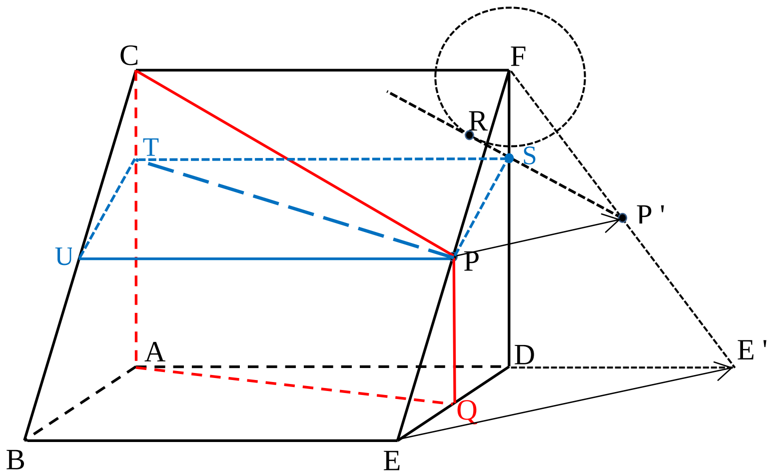
8. Vlak ACP heeft als snijlijn met vlak EDF de lijn PQ // AC // DF.
Inhoud prisma ABC.DEF is $3 \times 8 \times 10 = 240$.
Inhoud afgeknot prisma ABC.QEP is $7/8 \times 1/3 \times 24 \times 20 = 140$.
Verhouding is: $140 : (240 - 140) = 140 : 100 = 7 : 5$



9. M ligt op lijn PN // ADEB zo, dat NM = ME.
In ΔMPE is hoek $P = 90^o$, $MP = 10 - r$ en $PE^2 = 3^2 + 4^2$ dus:
$(10 - r)^2 + 25 = r^2$ dus $100 - 20r + 25 = 0$ geeft $r = 6¼$.

10. De lijnen door P die CF kruisen op een afstand 2, raken aan de cilinder met straal 2 die CF als as heeft. In de figuur rechts is driehoek FDE een kwartslag gedraaid om FD. Driehoek FDE ' is dus een parallelprojectie van ΔFDE.





De raaklijn vanuit P ' naar raakpunt R raakt de cirkel om F met straal 2 en snijdt DF in S. De raaklijn aan de cilinder zal dus in raakvlak **PSTU** moeten liggen, evenwijdig aan de as CF. Maar ook zal de gezochte lijn in vlak **ACPQ** moeten liggen (vraag 8) dus is de gezochte lijn de lijn PT.

Opmerking: de laatste vraag doet sterk denken aan het vak 'Beschrijvende meetkunde' zoals dat op de oude HBS (tot halverwege de jaren zestig) werd bedreven.

Opgave 4

Voor $-\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ is gegeven: $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos 2x}$

11. Los op: $f(x) \geq 4\cos x$.

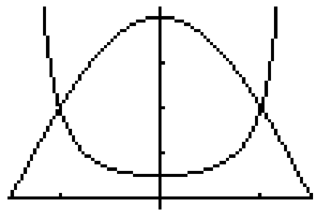
Verder is gegeven de differentiaalvergelijking $\dfrac{dy}{dx} = 2y^2 \cdot \sin 2x$

12. Onderzoek of $f(x)$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking.

Voor een oplossingsfunctie g van de differentiaalvergelijking geldt: $g(\frac{1}{2}\pi) = 1$

13. Toon aan dat $g(\frac{1}{2}\pi)$ een maximum is.

14. Stel een functievoorschrift op van g.



11. Voor een schetsje van de grafieken moet gezien worden dat $\cos 2x$ tussen -1 en 1 ligt, de noemer $1 + \cos 2x$ dus tussen 0 en 2 ligt en de breuk dus een minimum ½ heeft voor $x = 0$.

Eerst oplossen de vergelijking: $\dfrac{1}{1+\cos 2x} = 4\cos x$ geeft

$\dfrac{1}{1+(2\cos^2 x - 1)} = 4\cos x \quad \Leftrightarrow \quad \cos^3 x = \dfrac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \dfrac{1}{2}$ met de oplossingen $x = \pm\dfrac{1}{3}\pi$.

De ongelijkheid heeft dus als oplossing $-\dfrac{1}{2}\pi \leq x \leq -\dfrac{1}{3}\pi \quad \vee \quad \dfrac{1}{3}\pi \leq x \leq \dfrac{1}{2}\pi$

12. Invullen $y = \dfrac{1}{1+\cos 2x}$ en $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$ in de d.v. geeft: $\dfrac{2\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2} = 2 \cdot \dfrac{1}{(1+\cos 2x)^2} \cdot \sin 2x$

en dat klopt voor alle x, $f(x)$ is dus een oplossing van de differentiaalvergelijking.

13. Een tekenschema van dy/dx levert nulpunten op de lijnen $y = 0$ (de x-as) en $\sin 2x = 0$ (de lijnen $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$, enz). Steekproefjes links en rechts naast de lijn $x = \frac{1}{2}\pi$ (bijvoorbeeld bij $x = \frac{1}{4}\pi$ en $\frac{3}{4}\pi$) levert het patroon **+ 0 –** horend bij een maximum.

14. De d.v. integreren: $\dfrac{1}{y^2}\,dy = 2\sin 2x\,dx$ geeft $-\dfrac{1}{y} = \cos 2x + C$ invullen geeft $-1 = \cos\pi + C$

dus C=0 en $g(x) = -\dfrac{1}{\cos 2x}$