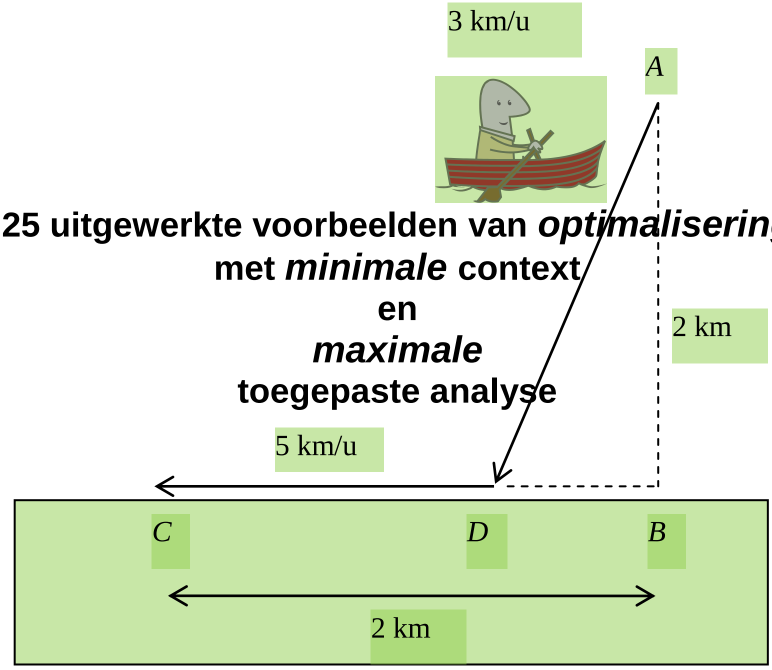
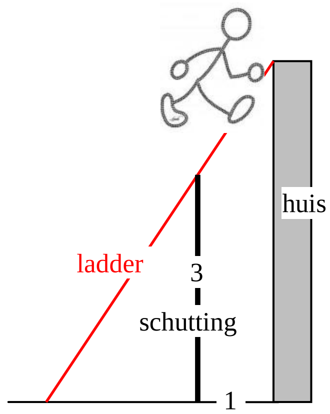
Module wiskunde D (h/v)

25 uitgewerkte voorbeelden van *optimalisering*
met *minimale* context
en
maximale
toegepaste analyse



voor HAVO en VWO
wiskunde B en D



(en de grafische rekenmachine alleen voor de illustraties)

Henk Pfaltzgraff, januari 2013

25 modellen toegepaste analyse voor wiskunde B met uitgewerkte antwoorden,
zonder grafische rekenmachine op te lossen in een gematigde context.

Een model beschrijft een situatie wiskundig (algebraïsch, analytisch) met de bedoeling daar conclusies uit te trekken of voorspellingen te doen. De grafische rekenmachine wordt hier alleen gebruikt als illustratiemateriaal. De context moet een minimum aan 'ruis' (woorden) bevatten. Het is daarbij nodig, de werkelijkheid te vereenvoudigen tot een hanteerbaar geheel van punten, lijnstukken en goed gedefinieerde grootheden. Het oplossen is dus toegepaste algebra en/of toegepaste analyse en verloopt volgens een stappenplan:

- Geef de betrokken grootheden (variabelen) een naam. Gebruikelijk is de letter x voor de variabele die vooralsnog onbekend is. Let op de randvoorwaarden: het domein (de grenzen) van de variabelen.
- Druk het verband tussen de verschillende variabelen uit in een formule (functie).
- Vul een aantal waarden in voor de verschillende variabelen (substitutie) om een idee te krijgen van de oplossingen.
(dit is de oriëntatie fase)
- Bij een algebraïsch model: stel een vergelijking op met die functie en los die vergelijking op.
- Bij een optimaliseringsmodel: bepaal de extreme waarde(n) van die functie via differentiëren.
- Controleer het antwoord, bijvoorbeeld met een grafiekje op een grafische rekenmachine.

Naar de aard van de in het leerplan wiskunde B voorkomende functies is een indeling gemaakt in 4 typen opgaven:

A. Tweede- (en -derde)graads functies
B. Wortelfuncties
C. Gebroken functies
D. Gemengde functies (de met een * gemerkte opgaven zijn lastig)

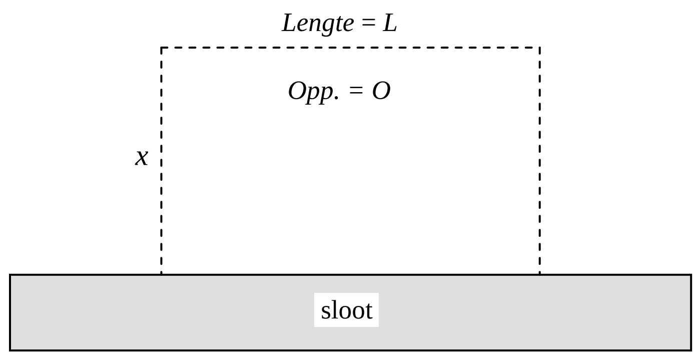
Verschillende aspecten hiervan komen aan de orde in het volgende standaard voorbeeld.

Voorbeeld. *Een boer heeft een rechthoekig stuk land afgebakend met schrikdraad. Aan één kant grenst het land aan een sloot, daar is geen schrikdraad nodig. In de vragen d en e wordt een optimale oppervlakte of lengte gezocht. Vraag a, b en c zijn ter voorbereiding.*

(a) Bereken de oppervlakte van de rechthoek, als de breedte 15 m is en de totale lengte van het schrikdraad 100 m is.
(b) Bereken de lengte van het schrikdraad, als de oppervlakte 1600 m^2 is en de breedte 80 m is.
(c) Bereken de breedte van de rechthoek, als de oppervlakte 2500 m^2 is en de lengte van het schrikdraad 150 m is.
(d) Wat is de maximale oppervlakte die de boer kan afbakenen met 120 meter schrikdraad?
(e) Hoeveel meter schrikdraad is minimaal nodig om een gebied van 3200 m^2 af te zetten?
- - - - - - - - - - - - - - -

Antwoorden.

Noem de breedte van de rechthoek x, de oppervlakte van het gebied O en de lengte van het schrikdraad L.
De randvoorwaarden zijn: $x > 0$, $O > 0$, $L > 0$ en $x < ½ L$.



(a) O uitdrukken in L en x: $O = x(L - 2x) = 15(100 - 30) = 15 \times 70 =$ **1050** (m^2)

(b) L uitdrukken in O en x: $L = 2x + \dfrac{O}{x} = 160 + \dfrac{1600}{80} =$ **180** (m)

(c) x uitdrukken in O en L: $O = x(L-2x)$ dus $2x^2 - Lx + O = 0$ geeft $x_{1,2} = \dfrac{L \pm \sqrt{L^2 - 8O}}{4}$

$x_{1,2} = \dfrac{150 \pm \sqrt{150^2 - 8 \times 2500}}{4} = \dfrac{150 \pm 50}{4}$ met twee oplossingen: $\boldsymbol{x_1 = 50}$ en $\boldsymbol{x_2 = 25}$ (m).
Beide oplossingen voldoen.

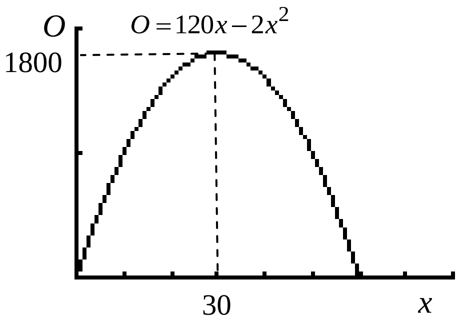
(d) Uit (a) volgt $O = x(120 - 2x)$ dus $\dfrac{dO}{dx} = 120 - 4x$; $\dfrac{dO}{dx} = 0$ levert $x = 30$ en $O_{\max} = 30 \times 60 = 1800$ (m^2)
De maximale oppervlakte die met 120 meter schrikdraad kan worden afgebakend is dus **1800 m^2**.

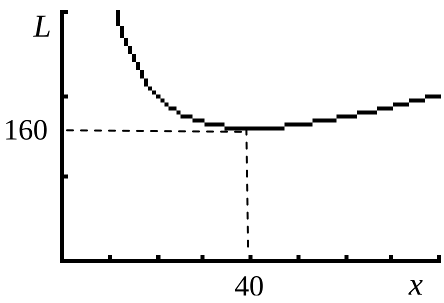
De grafiek van O tegen x (links hieronder) is niet meer dan een illustratie, een plaatje, en speelt bij de oplossing verder geen rol.

(e) Uit (b) volgt $L = 2x + \dfrac{3200}{x}$ dus $\dfrac{dL}{dx} = 2 - \dfrac{3200}{x^2}$; $\dfrac{dL}{dx} = 0$ levert $x^2 = 1600$ en $x = 40$ dus $L_{\min} = 160$ (m)

De minimaal nodige hoeveelheid schrikdraad is **160 m**.

Grafiekjes:

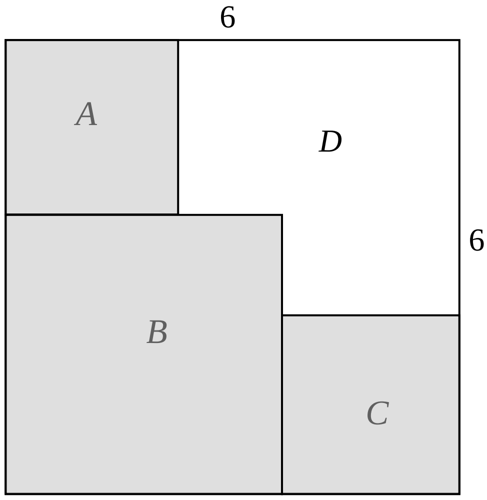




De uitgewerkte antwoorden van de volgende opgaven staan op pagina 10 en verder.

Een variant op vraag 10 van het examen vwo wiskunde B 2012-I ('vierkanten')

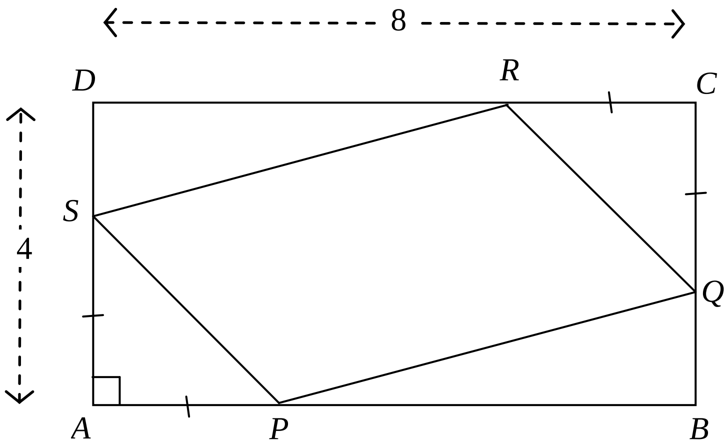
A1. *Zie de figuur hiernaast.*
De drie gearceerde vierkanten A, B en C liggen aaneengesloten binnen een vierkant van 6 bij 6.
(a) Bereken de oppervlakte van B als de oppervlakten van B en D gelijk zijn.
(b) Bereken de maximale oppervlakte van het resterende deel (D) van het grote vierkant.



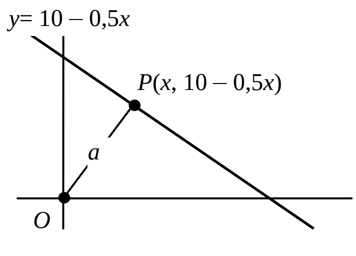
Maximale oppervlakte van een parallellogram binnen een rechthoek

A2. *Gegeven is rechthoek ABCD met AB = 8 en BC = 4.*
Op de zijden van deze rechthoek liggen de punten P, Q, R en S zo dat AP = AS en CQ = CR.

Bereken de maximale oppervlakte van parallellogram PQRS.

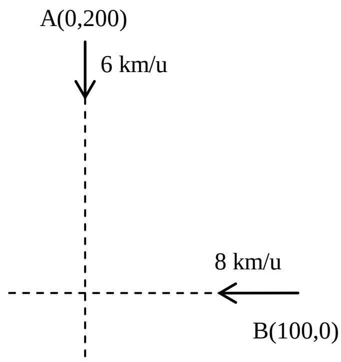


A3. *Op de lijn* $y = 10 - 0{,}5x$ *en in het eerste kwadrant ligt punt P.*
Bereken de minimale afstand van P tot de oorsprong O.



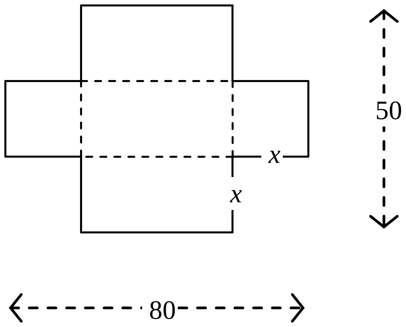
Minimale afstand tussen schepen

A4. *Schip A zit op tijdstip t = 0 (t in uren gemeten) 200 km ten Noorden van de oorsprong van een assenstelsel en vaart in zuidelijke richting met een snelheid van 6 km per uur. Schip B zit op t = 0 100 km ten oosten van de oorsprong en vaart met een snelheid van 8 km/u naar het westen.*
Op welk tijdstip is de afstand AB tussen de schepen (hemelsbreed) minimaal?
Bereken de minimale afstand in km. Wat zijn de coördinaten van de schepen op dat tijdstip?



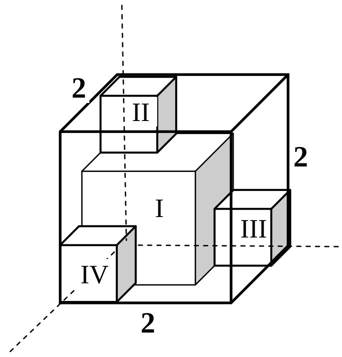
Een derdegraads model: maak van een netwerk een doosje

A5. *Van een rechthoekig stuk karton van 80 bij 50 cm wordt aan de hoeken vier keer een vierkantje met zijde x afgeknipt. Bereken de maximale inhoud van het doosje (zonder deksel) dat daarvan gevouwen kan worden.*

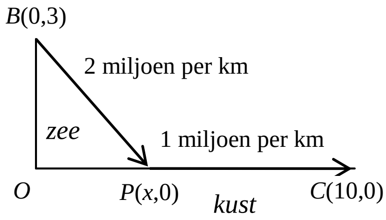


Drie dimensies

A6. *Deze opgave gaat over een stapeling van kubusvormige dozen. Doos I wordt in de hoek van een kamer geschoven, de dozen II, III en IV daartegenaan (ook tegen de muren aangeschoven). De kubussen II, III en IV zijn even groot. Deze vier dozen passen precies binnen een denkbeeldige kubus met een ribbe van 2 (meter). Bereken de minimale inhoud in liters van de dozen I+II+III+IV samen.*



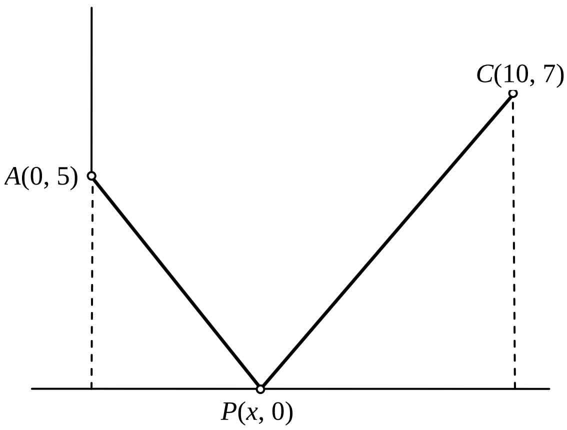
B1. *Een gaspijp moet worden aangelegd, lopend van een boortoren 3 km uit de kust naar een centrale, 10 km verderop langs een rechte kustlijn. De kosten voor aanleg in de zee zijn € 2 miljoen per kilometer; de kosten over land zijn € 1 miljoen per kilometer. Leg een x-as langs de kustlijn en geef de boortoren de coördinaten B(0,3) en de centrale C(10,0).*
(a) Stel dat de totale kosten op € 16 miljoen euro uitkomen. De pijp komt in het punt P aan land. Bereken in dat geval de positie van P.
(b) Bereken de minimale aanlegkosten.



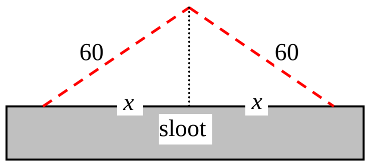
variant op het **havo examen 2011-I vraag 10-13**

Kortste route

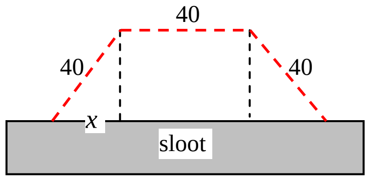
B2. *Gevraagd wordt de lengte van de kortste route van A(0, 5) naar C(10, 7), via een punt P op de x-as.*



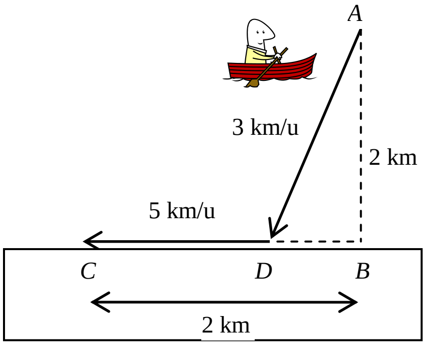
B3. *Iemand wil een zo groot mogelijk gebied, grenzend aan een brede sloot, afschermen met twee rechte stukken schrikdraad, elk van 60 meter lengte. Wat is de maximale oppervlakte van het afgebakende land?*



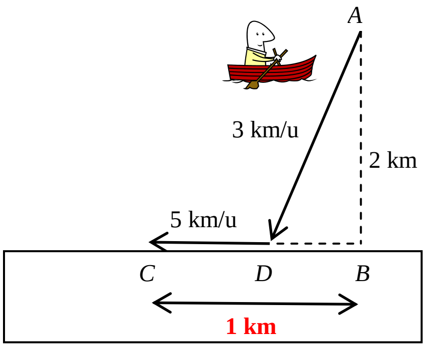
B4. *Iemand wil een gelijkbenig trapezium maken met drie gelijke zijden, elk 40 meter, grenzend aan een sloot. Wat is de maximaal af te bakenen oppervlakte?*



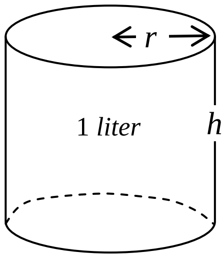
B5. *Een persoon A op een woonschip op 2 km van het dichtstbijzijnde punt B op een rechte wal, roeit iedere ochtend met een snelheid van 3 km/u naar de wal, op weg naar een café C dat op een afstand van 2 km van B ligt. Het laatste stuk DC wandelt hij eventueel (met een snelheid van 5 km/u). We laten even in het midden wat deze persoon daar elke ochtend te zoeken heeft. Hoe dan ook, interessant is het te weten, wat de kortste reistijd is van A via D naar C.*



B6. *Wat is de uitkomst van de vorige opgave, als de afstand van B naar C gelijk is aan 1 kilometer?*



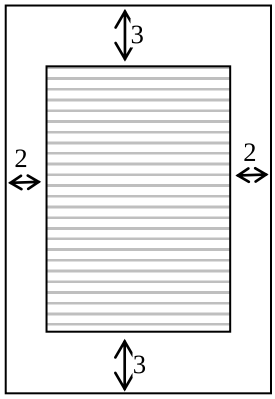
C1. *Een blikfabriek maakt onder andere cilindervormige blikken voor de conservenindustrie. Er is veel vraag naar blikken met een inhoud van 1 liter. Voor de fabrikant is het belangrijk dat daar zo min mogelijk blik voor nodig is, dan blijven zijn kosten laag. Welke afmetingen zal hij zijn literblikken geven?*



Neem aan dat elk blik zuiver cilindrisch is en dat de benodigde hoeveelheid blik gelijk is aan de totale oppervlakte van het blik. De twee bepalende variabelen zijn dan de straal van (het grondvlak van) het blik r en de hoogte h, neem beide in cm. Het gegeven betreft de inhoud van een blik (1 liter = 1000 cm^3), de eis betreft de oppervlakte die minimaal moet zijn. Voor het volume V van een cilinder geldt: $V = \pi r^2 h$.
Voor de oppervlakte A van een cilinder geldt: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
(a) Druk h uit in r.
(b) Druk A uit in r.
(c) Bereken de optimale afmetingen (d.w.z. met de minimale hoeveelheid blik voor 1 liter inhoud).

Gunstigste afmeting van een pagina

C2. *Een pagina uit een boek heeft een oppervlakte van 540 cm^2.*
De marges zijn 2 cm links/rechts en 3 cm boven/onder.
Bereken de optimale lengte en breedte van het papier, waarbij er zoveel mogelijk tekst op iedere pagina komt.

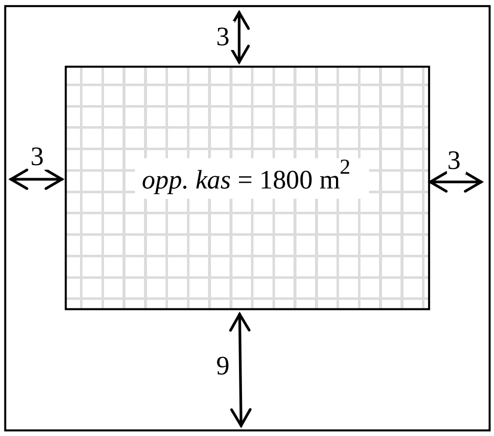


Zo weinig mogelijk grond kopen

C3. *Een tuinder wil zijn kas uitbreiden tot een rechthoek met een oppervlakte van 1800 m^2. Hiervoor moet grond gekocht worden.*

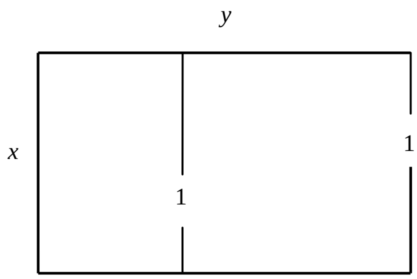
Rondom de kas moeten paden van 3 en 9 meter vrijgehouden worden. Zie de tekening.

Bij welke afmetingen van de kas hoeft hij zo weinig mogelijk grond te kopen?

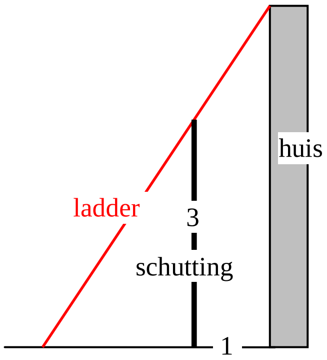


Zo goedkoop mogelijk behangen

C4. *Een vakantiehuisje met 2 kamers en een vloeroppervlakte van 50 m^2 moet worden gebouwd. De breedte (x meter) en de lengte (y meter) liggen nog niet vast. De muren moeten worden behangen (niet boven de deuren van 1 meter breed). De kosten daarvan zijn k euro per m^2 en moeten minimaal zijn. De hoogte van het plafond is h meter. Welke afmetingen x en y leveren de minste kosten op?*

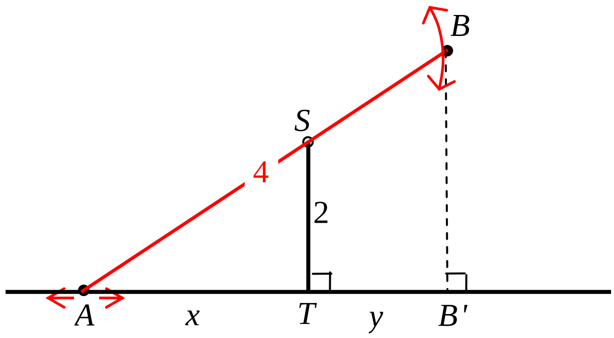


D1*. *Iemand wil een ladder kopen om zijn dakgoten schoon te maken.*
Vlak naast zijn huis op 1 m van de muur staat echter een schutting van 3 m hoog.
Hoe lang moet een ladder minstens zijn om over de schutting tegen de muur van het huis te komen?

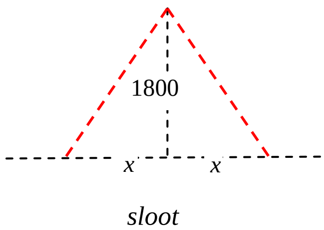


Een variant op som 13-15 examen wisk B vwo 2012-I

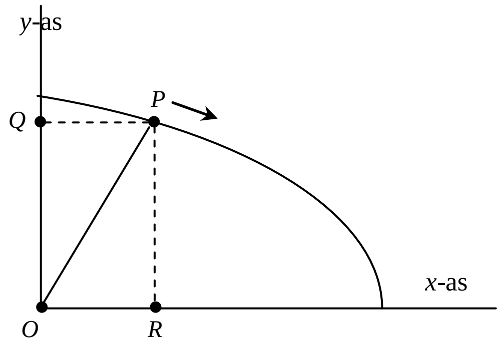
D2*. *Zie de tekening. Een plank AB met een lengte van 4 meter steunt op de plaats S op een muurtje ST van 2 meter hoogte. Punt A beweegt over de grond in de richting van het muurtje. B' is de projectie van B op de grond. De vraag is, hoe groot de maximale uitwijking TB' is.*



D3*. *Een gebied met een oppervlakte van 1800 m^2, grenzend aan een rechte sloot, wordt afgebakend door twee rechte, gelijke stukken schrikdraad. Bereken de minimale lengte van het schrikdraad.*

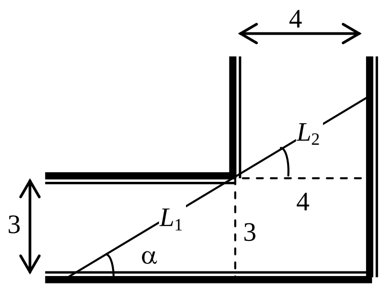


D4. *Punt P beweegt over de grafiek van* $f(x) = \sqrt{18-4x}$ *met* $0 \leq x_P \leq 4{,}5$. *O is de oorsprong.*
Q en R zijn de projecties van P op de y-as en de x-as.
Als P naar rechts gaat, wordt OR groter en RP kleiner.
Daarbij verandert rechthoek ORPQ.
(a) Bereken de maximale oppervlakte van ORPQ.
(b) Bereken de coördinaten van P als $PO = \sqrt{15}$.
(c) Bereken de minimale afstand van P tot O.
(d) Bereken de maximale afstand van P tot O.

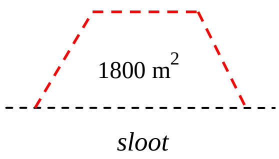


D5*. *Een lange, onbuigbare staaf met lengte L moet om een rechte hoek getransporteerd worden, tussen twee gangen van 3 en 4 meter breed. Zie het plaatje. Onderzoek bij welke waarden van L dat transport mogelijk is.*

Aanwijzing: druk $L = L_1 + L_2$ *uit in hoek* α.

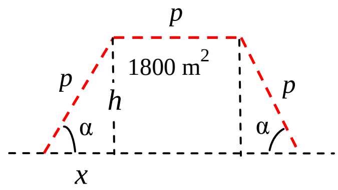


D6*. *Een gebied met een oppervlakte van 1800 m², grenzend aan een rechte sloot, wordt afgebakend door drie even lange, rechte stukken schrikdraad. Bereken de minimale lengte van het schrikdraad.*



Aanwijzing. Noem de zijden van het trapezium p, de lengte van het schrikdraad is dan L = 3p, en druk de oppervlakte O uit in p en hoek α.

$\sin\alpha = \dfrac{h}{p}$ *dus* $h = p\sin\alpha$ *en* $\cos\alpha = \dfrac{x}{p}$ *dus* $x = p\cos\alpha$

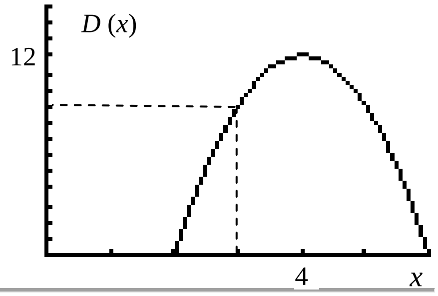


ANTWOORDEN

A1.

(a) Stel dat de zijde van vierkant B x is. Dan geldt voor de oppervlakte van vierkant D:
$D(x) = 36 - x^2 - 2(6 - x)^2 = x^2$ met de oplossing $x = 3$ en **opp. B = 9**.

(b) $D(x) = 36 - (x^2 + 2(6 - x)^2)$ dus $(x^2 + 2(6 - x)^2)$ moet minimaal zijn.
Differentiëren: $2x + 4(x - 6) = 0$ dus $x = 4$ en $D(4) = 12$ **opp. *D* = 12.**
Opm. Voor $x < 3$ overlappen A en C elkaar.



A2.

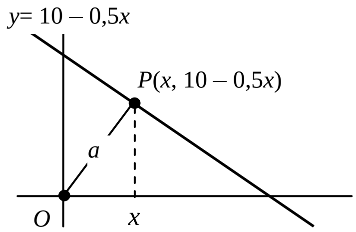
Stel $AP = x$, dan komt er voor de oppervlakte: $32 - x^2 - (8 - x)(4 - x) = 2x(6 - x)$
Differentiëren en nul stellen geeft $x = 3$ met als maximale oppervlakte **18**.

A3.

$P(x, 10 - \frac{1}{2}x)$. De afstand $OP = a = \sqrt{x^2 + (10 - \frac{1}{2}x)^2}$.

Merk op, dat als a minimaal is, dat dan ook $a^2 = x^2 + (10 - \frac{1}{2}x)^2$ minimaal is.

$\frac{da^2}{dx} = (2x - 2\cdot\frac{1}{2}(10 - \frac{1}{2}x)) = 0$ dus $x = 4$ en $a(4) = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ is de minimale afstand van P tot O.



A4.

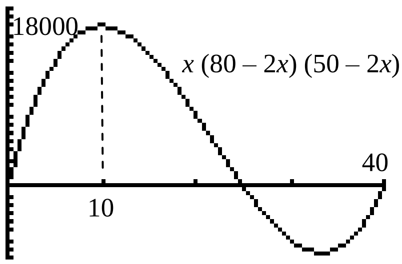
$A(0, 200 - 6t)$ en $B(100 - 8t, 0)$. Stel $d(t)$ is de afstand tussen A en B.

Als $d(t)$ minimaal is, is $d^2(t)$ dat ook. Je kunt dus verder werken met $d^2(t) = (200 - 6t)^2 + (100 - 8t)^2$.

Differentiëren geeft $-12(200 - 6t) - 16(100 - 8t) = 0$ uitgewerkt tot $t = 20$ en $d^2(20) = 10000$.
De minimale afstand is dus **100 km** en de schepen zijn dan op de coördinaten: $A(0, 80)$ en $B(-60, 0)$.

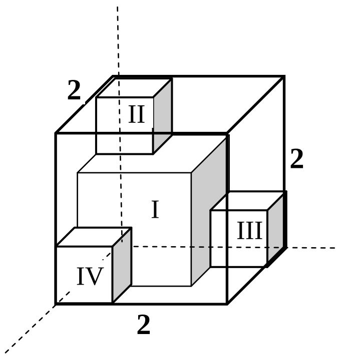
A5.

Inhoud = $x(80 - 2x)(50 - 2x)$
De afgeleide nul stellen levert:
$3x^2 - 130x + 1000 = 0$
oplossingen: $x = 10$ en $x = 33\frac{1}{3}$ (deze vervalt)
Maximale inhoud: **18000** (cm^3)

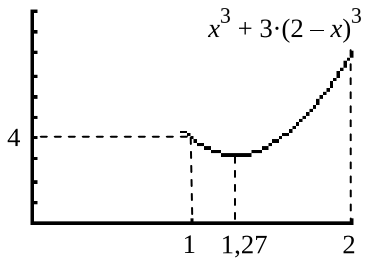


A6.

Stel dat de ribbe van doos I gelijk is aan x (meter). Randvoorwaarde is, dat $1 < x < 2$ moet zijn. De dozen II, III en IV hebben dan een ribbe van $(2 - x)$. De inhoud van I+II+III+IV is gelijk aan $f(x) = x^3 + 3\cdot(2 - x)^3$.
De minimale inhoud daarvan vinden we na differentiëren en nul stellen:
$f'(x) = 3x^2 + 9\cdot(2 - x)^2\cdot -1 = 3x^2 - 9(2 - x)^2 = 0$ dus
$3x^2 = 9(2 - x)^2$ met de oplossingen: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3}$
(de oplossing $3 + \sqrt{3}$ vervalt vanwege de voorwaarde $x < 2$).



Dus $x \approx 1{,}268$ m en de minimale inhoud is
$f(1{,}268) = 3215000$ cm^3 = **3215** dm^3 (liter).
Opgemerkt kan nog worden dat voor $x = 1$
alle vier de kubussen gelijk zijn en de totale inhoud 4000 liter is.
En voor $x = 2$ wordt de kubus totaal gevuld door kubus I (8 m^3).



B1.

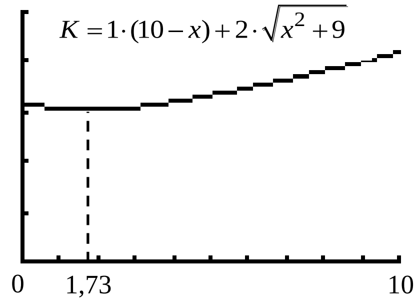
(a) $OP = x$; $PC = 10 - x$ en $BP = \sqrt{x^2+9}$.

De totale kosten K (in miljoenen Euro) zijn: $K = 1\cdot(10-x) + 2\cdot\sqrt{x^2+9}$ en de vergelijking die moet worden opgelost is: $10 - x + 2\sqrt{x^2+9} = 16$ dus $2\sqrt{x^2+9} = 6 + x$ wat na kwadrateren geeft: $4(x^2 + 9) = 36 + 12x + x^2$.
De oplossing hiervan volgt uit: $3x^2 - 12x = 0$ dus $x = 4$ (km) en ***P*(4, 0)**.

(b) De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{dK}{dx} = -1 + \dfrac{2\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+9}} = 0$ dus
$\sqrt{x^2+9} = 2x$ wat na kwadrateren de oplossing
$x = \sqrt{3} \approx$ **1,73** km oplevert. De kosten zijn dan **15,2** (miljoen euro).

Merk op, dat aan de randen van het domein (bij $x = 0$ en $x = 10$) de kosten hoger uitkomen.

Als P samenvalt met O, krijg je $K = 16$ (miljoen euro),
als P samenvalt met C, krijg je $K = 20{,}9$ (miljoen euro).



B2.

$L = \sqrt{(x^2+25)} + \sqrt{((10-x)^2+49}$

$L' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \dfrac{x-10}{\sqrt{x^2-20x+149}} = 0$

$x^2\,((x-10)^2 + 49)) = (10-x)^2\,(x^2 + 25)$

$49x^2 = 25\,(10-x)^2$

$49x^2 = 2500 - 500x + 25x^2$

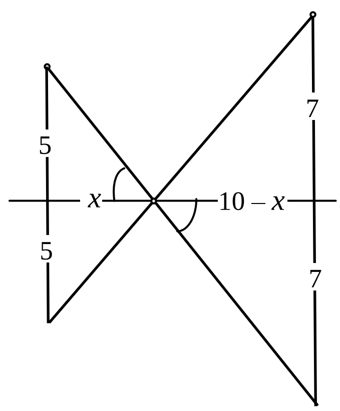
[of: $7x = \pm\, 5(10-x)$]

$24x^2 + 500x - 2500 = 0$

[Terzijde (hiernaast).
Kan ook via gelijkvormigheid
opgelost worden:
$\dfrac{x}{5} = \dfrac{10-x}{7}$ enz.]

D = 700

$x_{1,2} = \dfrac{-500 \pm 700}{48}$ geeft $\boldsymbol{x = 4\frac{1}{6}}$



B3.

Stel dat de basis van de gelijkbenige driehoek $2x$ is. De hoogte van die driehoek is dan $h = \sqrt{3600 - x^2}$ en de oppervlakte is: $O(x) = x\cdot\sqrt{3600 - x^2}$.

Na differentiatie met de productregel volgt $O'(x) = 1\cdot\sqrt{3600-x^2} + x\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{3600-x^2}} = \sqrt{3600-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{3600-x^2}}$.

Nulstellen van de afgeleide en kruislings vermenigvuldigen leidt tot $3600 - x^2 = x^2$ met de oplossing $x = \sqrt{1800}$ en de maximale oppervlakte is $O_{\max} = \sqrt{1800}\cdot\sqrt{3600-1800}$ = **1800** (m^2).

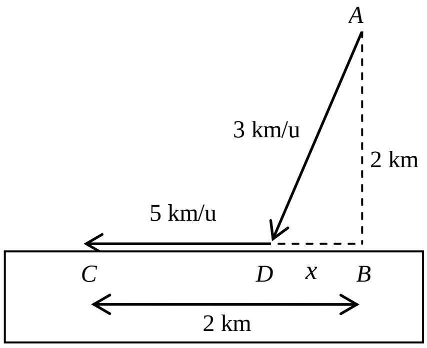
B4.

De oppervlaktefunctie is $O(x) = (x+40)\sqrt{1600 - x^2}$ met $O'(x) = \sqrt{1600 - x^2} - \dfrac{x(x+40)}{\sqrt{1600-x^2}} = 0$

Hieruit volgt $1600 - x^2 = x^2 + 40x$ met de oplossing $x = 20$; de maximale oppervlakte is $1220\sqrt{3} \approx$ **2078 m²**.

B5.

De gunstigste (optimale) positie van het punt D moet bepaald worden.
Stel: $DB = x$ (de eenheid is km). Volgens de stelling van Pythagoras is nu $AD^2 = x^2 + 2^2$ dus $AD = \sqrt{x^2+4}$ en $DC = 2 - x$. De tijd is de weg gedeeld door de snelheid, dus is de totale tijd T gelijk aan:



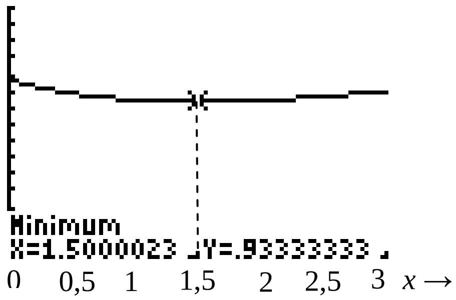
$T = \dfrac{AD}{3} + \dfrac{DC}{5} = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \dfrac{2-x}{5}$. $T' = \dfrac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \dfrac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow$

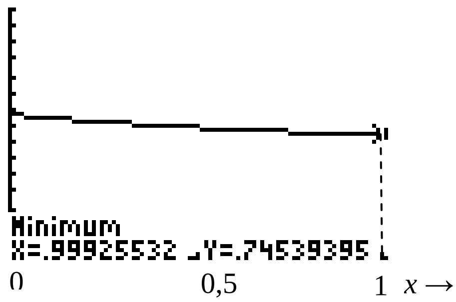
$3\sqrt{x^2+4} = 5x$ met oplossing $x = 1\frac{1}{2}$ en een reistijd van **56 minuten**.

B6.

Als $BC = 2$ (opdracht **B5**) krijg je $T = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \dfrac{2-x}{5}$ *neem* $0 \le x \le 3$;

Als $BC = 1$ (opdracht **B6**) krijg je de functie $T = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \dfrac{1-x}{5}$ *met* $0 \le x \le 1$. De grafieken daarvan zijn:





***BC* = 2**
Minimum bij *x* = 1,5

***BC* = 1**
Randminimum bij *x* = 1

In het laatste geval is rechtstreeks roeien van A naar C (niet lopen) de optimale, snelste route; de oplossing $x = 1{,}5$ valt dan buiten het domein $0 \le x \le 1$ (en is daardoor dus geen oplossing meer).

C1.

(a) Met $V = 1000$ vind je $1000 = \pi r^2 h$ en dus: $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.

(b) Als je nu in de formule voor A deze uitdrukking invult voor h,

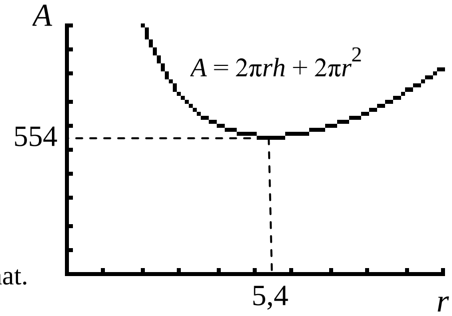
dan vind je: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\cancel{\pi r}\dfrac{1000}{\cancel{\pi r^2}} + 2\pi r^2 = \dfrac{2000}{r} + 2\pi r^2$.

(c) De afgeleide nul stellen geeft: $\dfrac{dA}{dr} = -\dfrac{2000}{r^2} + 4\pi r = 0$

met de oplossing $r^3 = \dfrac{2000}{4\pi} \approx 159{,}15$ dus

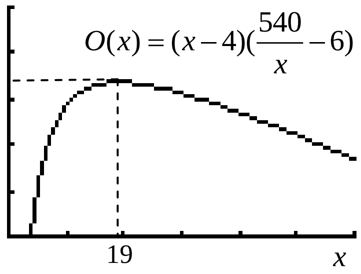
$r = \sqrt[3]{159{,}15} = 159^{1/3} \approx$ **5,4** (cm) en ***h*** $\approx$ **10,8** (cm).

Hiernaast de grafiek om te laten zien dat het inderdaad om een minimum gaat.



C2.

Noem de breedte van het papier x (cm), de lengte is dan $\dfrac{540}{x}$ (cm).



De oppervlaktefunctie voor het tekstgedeelte is $O(x) = (x-4)(\frac{540}{x} - 6)$.

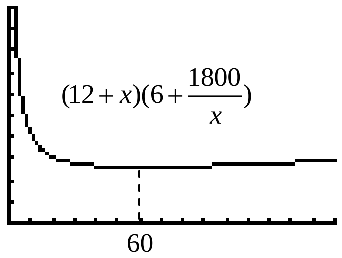
$$\frac{dO}{dx} = 1 \cdot (\frac{540}{x} - 6) + (x-4) \cdot (-\frac{540}{x^2}) = 0 \quad \text{geeft:}$$

$540x - 6x^2 - 540(x-4) = 0$ met de oplossing $x = \sqrt{360} = 6\sqrt{10} \approx 19{,}0$.

Het papier heeft in dat geval het formaat **19,0 bij 28,4 cm**.

C3.

Stel de lengte en breedte van de kas op x en $\dfrac{1800}{x}$ (meter). De benodigde grondoppervlakte is dan: $Opp. = (12+x)(6+\frac{1800}{x}) = 72 + \frac{21600}{x} + 6x + 1800$



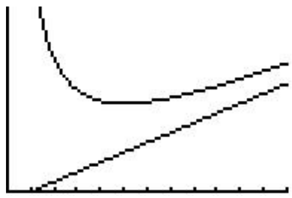
De afgeleide nul stellen geeft: $6 - \dfrac{21600}{x^2} = 0$ met $x = 60$.

De kas zal **60 bij 30 meter** zijn.

C4.

Oppervlakte $xy = 50$ dus $y = \dfrac{50}{x}$ en $K(x) = kh \cdot (\frac{100}{x} + 4x - 3)$.

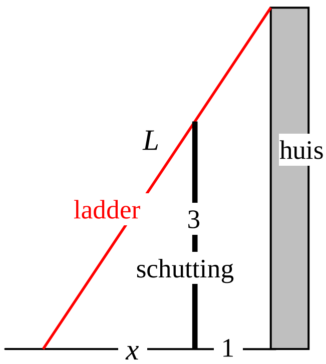
Differentiëren geeft $-\dfrac{100}{x^2} + 4 = 0$ met $x = 5$ en optimale afmeting **5 bij 10 meter**.



D1*.

Noem de lengte van de ladder L (meter).

De voet van de ladder staat op afstand x van de schutting.

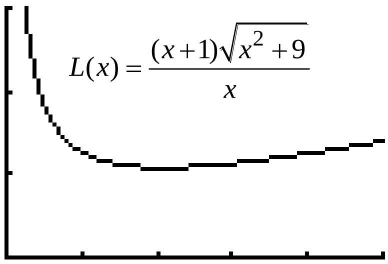


Uit de gelijkvormigheid van driehoeken volgt:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x+1}{L} \quad \text{dus} \quad L(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x^2+9}}{x} .$$

De (teller van de) afgeleide hiervan moet nul zijn:

$$x\{1 \cdot \sqrt{(x^2+9)} + (x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+9)}}\} - (x+1) \cdot \sqrt{(x^2+9)} = 0$$



De oplossing hiervan is $x = \sqrt[3]{9} \approx 2{,}08$
en de minimale lengte is $L(2{,}08) \approx$ **5,4** (meter).

D2*.

$AT = x$; $TB' = y$; $AS = \sqrt{x^2+4}$. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken ATS en $AB'B$ volgt:

$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+y}{4}$ dus $y = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}} - x$

Differentiëren en nul stellen geeft: $\dfrac{4\sqrt{(x^2+4)} - \dfrac{4x^2}{\sqrt{(x^2+4)}}}{x^2+4} - 1 = 0$ dus $4\sqrt{(x^2+4)} - \dfrac{4x^2}{\sqrt{(x^2+4)}} = x^2+4$.

Uitwerken tot $4(x^2+4) - 4x^2 = (x^2+4)^{1\frac{1}{2}}$ dus $(x^2+4)^{1\frac{1}{2}} = 16$ met $x^2+4 = 16^{\frac{2}{3}} \approx 6,35$ dus $x \approx 1,53$ en $y \approx 0,9$

D3*.

Oplossing. De hoogte van de driehoek is 1800/x dus de lengte is $L(x) = 2\sqrt{x^2 + \frac{1800^2}{x^2}}$.

Differentieer met de kettingregel: $L'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1800^2}{x^2}}} \cdot (2x - \dfrac{6480000}{x^3}) = 0$. Dit geeft $x^4 = 3240000$

en $x = \sqrt[4]{3240000} = 30\sqrt{2}$. De minimale lengte is $L(300\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{1800+1800}$ = **120(meter)**.

D4.

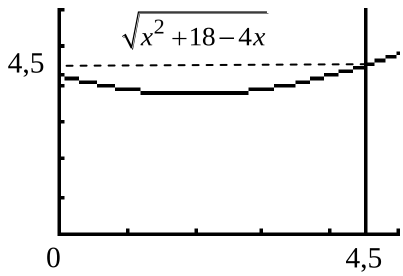
(a) Opp. $ORPQ$ = $x \cdot \sqrt{18-4x}$ differentiëren: $\sqrt{18-4x} - \dfrac{2x}{\sqrt{18-4x}} = 0$ geeft $18 - 4x = 2x$ dus max. = **3√6**.

(b) $PO^2 = x^2 + 18 - 4x = 15$ geeft $x2 - 4x + 3 = 0$ met twee antwoorden: ***P*(1, √14) en *P*(3, √6)**.

(c) Afstand = $\sqrt{x^2 + 18 - 4x}$ differentiëren: $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 18}} \cdot (2x - 4) = 0$

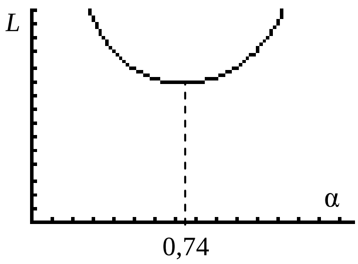
geeft $x = 2$ dus min. = **√14**

Merk op, dat je ook kunt werken met het kwadraat van de afstand (zonder kettingregel dus), want als PO minimaal is, dan is PO^2 dat ook.



(d) De maximale afstand is $\boldsymbol{OP_{max} = 4,5}$ (randmaximum, zie de grafiek).
Er zijn twee randmaxima: bij $x = 0$ is $OP = \sqrt{18} \approx 4,24$
(en bij $x = 4,5$ is $OP = 4,5$ en $4,5 > \sqrt{18}$).

D5*.



$L = \dfrac{3}{\sin\alpha} + \dfrac{4}{\cos\alpha}$ $\qquad L' = \dfrac{-3\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \Leftrightarrow 3\cos^3\alpha = 4\sin^3\alpha$

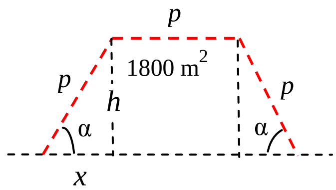
$\Leftrightarrow \tan^3\alpha = \frac{3}{4}$ met $\tan\alpha = 0.75^{1/3} \approx 0.909$ en $\alpha = \tan^{-1}(0.75)$

dus $\alpha \approx 0,7375$ en $L_{max} \approx 9,866$ m.

D6*.

Stel de lengte van de drie gelijke zijden is p. Er geldt:

$\sin\alpha = \frac{h}{p}$ *dus* $h = p\sin\alpha$ en $\cos\alpha = \frac{x}{p}$ *dus* $x = p\cos\alpha$



De oppervlakte is $O(\alpha) = xh + ph = p\cos\alpha \cdot p\sin\alpha + p \cdot p\sin\alpha =$

$p^2\sin\alpha\cos\alpha + p^2\sin\alpha = p^2\sin\alpha(1+\cos\alpha) = 1800$

dus de lengte van het schrikdraad $L(\alpha) = 3p = 3\cdot\sqrt{\frac{1800}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}}$. Dit is minimaal, als de noemer $\sin\alpha(1+\cos\alpha)$

maximaal is. Differentiëren en nul stellen hiervan geeft: $\cos\alpha(1+\cos\alpha) + \sin\alpha\cdot -\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha = 0$

Met de stelling van Pythagoras kan dit geschreven worden als $\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) + \cos\alpha = 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

waarna de abc-formule de oplossing $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ geeft. Dit invullen en er komt voor de minimale lengte:

$L_{MIN}(\frac{1}{3}\pi) = 3\cdot\sqrt{\frac{1800}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}}} = 3\cdot\sqrt{800\sqrt{3}} \approx 111{,}7$ (meter). Deze uitkomst is iets gunstiger dan de 120 meter bij opdracht **B3** en de voorbeeldopgave aan het begin van deze module.

We hebben drie varianten (a, b, c) bekeken met minimale omtrek en maximale oppervlakte, zie de opgaven **B3**, **B4** en **D3**. Telkens gaf hierbij de variant met het gelijkbenige trapezium een gunstiger resultaat dan de andere twee varianten. De optimale hoekwaarden ($\frac{1}{4}\pi = 45^0$, $\frac{1}{3}\pi = 60^0$) geven aan, dat het hier gaat om een half vierkant (bij variant a en b) en een halve regelmatige zeshoek (variant c). Figuren met veel symmetrie kunnen veel oppervlakte "omvatten" met een gegeven omtrek. Andersom gezegd, een gegeven oppervlakte wordt bij een symmetrische figuur door een minimale omtrek omspannen. De figuur met de meeste symmetrie, de (halve) cirkel, is hiervan het beste voorbeeld: bij een oppervlakte van een halve cirkel van 1800 m^2 hoort schrikdraad van $60\sqrt{\pi} \approx 106{,}3$ m (bij het vierkant 120); half-cirkelvormig schrikdraad van 120 m omvat een oppervlakte van ongeveer 2292 m^2 (bij het vierkant 1800).